

M A T H E M A T I K I

2024/2025

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

20. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen und Vektoren	1
1	Mengen und Abbildungen	1
2	Zahlen	4
3	Vollständige Induktion	9
4	Geometrie im \mathbb{R}^n	14
5	Die komplexen Zahlen	21

Kapitel 1

Zahlen und Vektoren

1 Mengen und Abbildungen

Wenn es um die Formulierung und Kommunikation mathematischer Sachverhalte geht, ist die Umgangssprache nur teilweise geeignet. Die Sprache der Mengenlehre ist oft nützlich. Keine Angst, wir wollen uns nicht inhaltlich mit der Mengenlehre befassen, es geht nur um ein paar Vokabeln: Angabe von Mengen, Teilmenge und Obermenge, Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement, leere Menge. Funktionen lassen sich ebenfalls mit Begriffen der Mengenlehre beschreiben, einschließlich der Konzepte Bild und Urbild, Einschränkung, Verkettung und Graph einer Funktion. Weiter gehören dazu die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv und Umkehrfunktion.

Der Begriff der Menge wurde 1895 von Georg Cantor eingeführt. Hier eine kurze Fassung:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen.

Das ist für unsere Zwecke ausreichend. Die einzelnen Objekte nennen wir *Elemente der Menge*. Wir schreiben $a \in M$ wenn a ein Element der Menge M ist; andernfalls schreiben wir $a \notin M$. Die Entscheidung, ob irgendein Objekt a Element von M ist oder nicht, muss anhand der Beschreibung der Menge M immer möglich sein. Beispiele:

- (a) Das griechische Alphabet ist die Menge

$$M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\}$$

Die Elemente sind die einzelnen Buchstaben, und wir haben M durch *Aufzählen aller Elemente* angegeben. Die Menge M bleibt gleich, wenn wir die Reihenfolge der Aufzählung ändern oder Elemente doppelt aufführen. Oft werden die Elemente nur unvollständig aufgezählt in der Erwartung, dass man sich den Rest irgendwie denken kann: $M = \{\alpha, \beta, \dots, \omega\}$.

- (b) Betrachte die Menge $N = \{1, 2, \dots, 29, 30\}$ sowie

$$M = \{p \in N \mid p \text{ ist Primzahl}\}.$$

Hier entsteht M durch Auswahl von Elementen der Menge N mittels einer Eigenschaft, nämlich Primzahl zu sein. Es ist $M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

(c) Eine Variante der aufzählenden Beschreibung haben wir bei

$$M = \{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Hier wird M durch die Menge der natürlichen Zahlen “parametrisiert”.

Eine Menge M heißt Teilmenge der Menge N , wenn jedes Element von M auch Element von N ist (Notation: $M \subset N$). Gibt es außerdem mindestens ein Element von N , das nicht zu M gehört, so ist M eine echte Teilmenge von N . Beispiel: unter den Studierenden der Mikrosystemtechnik bilden die männlichen eine echte Teilmenge, denn es gibt ja auch Studentinnen. Statt $M \subset N$ schreiben wir manchmal $N \supset M$, also N ist Obermenge von M .

Zur Veranschaulichung ist es praktisch, Mengen als Gebiete in der Ebene aufzufassen (Venn-Diagramm). Für zwei Mengen A und B können so folgende Mengen darstellen:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{(Schnittmenge)} \\ A \cup B &= \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{(Vereinigungsmenge)} \\ A \setminus B &= \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\} && \text{(Differenzmenge)}. \end{aligned}$$

Wir führen das Symbol \emptyset ein für die Menge, die kein Element enthält, die *leere Menge*. Das ist praktisch zum Beispiel bei der Bildung von Schnittmengen, es gilt

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{wenn } A, B \text{ kein gemeinsames Element haben.}$$

Ist X eine gegebene Grundmenge und $A \subset X$, so nennen wir $A^C = X \setminus A$ das Komplement von A . Das Komplement hängt von der Grundmenge X ab: die Aussage *ich trinke alles außer Ganter* hat verschiedene Bedeutung, je nachdem ob sie sich nur auf die badischen Biere bezieht oder auf alle alkoholischen Getränke.

Oben haben wir die Worte *und* sowie *oder* benutzt, die Aussagen miteinander logisch verknüpfen. Unter einer *Aussage* verstehen wir einen Satz, bei dem wir sinnvoll nach dem Wahrheitswert fragen können, das heißt ist der Satz *wahr* oder *falsch*? Zum Beispiel ist *Der Mars besteht aus grünem Käse* eine Aussage, während *Geh nach Hause!* oder *Was gibts heute in der Mensa?* keine Aussagen sind. Für Aussagen P, Q setze

$\neg P$	<i>nicht P</i>	wahr genau wenn P falsch falsch genau wenn P wahr
$P \wedge Q$	<i>P und Q</i>	wahr genau wenn P, Q beide wahr falsch genau wenn mindestens eine der Aussagen P, Q falsch
$P \vee Q$	<i>P oder Q</i>	wahr genau wenn mindestens eine der Aussagen P, Q wahr falsch genau wenn P, Q beide falsch
$P \Rightarrow Q$	<i>aus P folgt Q</i>	falsch genau wenn P wahr und Q falsch, wahr genau wenn P, Q beide wahr oder wenn P falsch.

Beachten Sie:

- das *oder* ist nicht ausschließend, kein entweder/oder.
- das Äquivalenzzeichen $P \Leftrightarrow Q$ bedeutet $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow P$. Es ist also wahr genau wenn P, Q beide wahr sind oder beide falsch.

- die Implikation $P \Rightarrow Q$ ist gleichbedeutend mit $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Dazu folgende Tabelle:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$Q \Rightarrow P$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	w

Wir sehen hier dass $Q \Rightarrow P$ nicht gleichbedeutend ist mit $P \Rightarrow Q$, das wird oft nicht beachtet. Wir kommen zum zweiten Begriff aus der Überschrift, den Abbildungen. Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y (gleichbedeutend: eine Funktion auf X mit Werten in Y) schreiben wir in der Form

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Jedem $x \in X$ wird genau ein Bildpunkt (Funktionswert) $f(x) \in Y$ zugeordnet. Die Menge X heißt Definitionsbereich von f . Mit dem Bild von f meinen wir die Menge der Bildpunkte (Menge der Funktionswerte)

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y.$$

Das Urbild einer Menge $B \subset Y$ unter f ist die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Verkleinern des Definitionsbereichs ergibt eine Einschränkung von f . Für $A \subset X$ ist

$$f|_A : A \rightarrow Y, (f|_A)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Beispiel: sei X die Menge aller Waren in einem Supermarkt und Y die Menge aller möglichen Preise in Euro. Ordnen wir jeder Ware $x \in X$ einen Preis $f(x) \in Y$ zu, so haben wir eine Funktion $f : X \rightarrow Y$. Die Menge der Waren, die maximal 1 Euro kosten, ist genau das Urbild des Intervalls $[0, 1]$. Betrachten wir statt aller Waren nur die Menge V der veganen Waren, so ergibt sich die Einschränkung $f|_V$.

Eine naheliegende Abbildung auf X ist die Identität, also $\text{id}_X : X \rightarrow X, \text{id}_X(x) = x$. Die Verkettung (Hintereinanderschaltung) von Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ ist

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Eine aus der Schule bekannte Möglichkeit, sich Funktionen bzw. Abbildungen vorzustellen, bietet der Graph. Dazu bilden wir das kartesische Produkt¹

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Es gilt $(x, y) = (x', y')$ genau wenn $x = x'$ und $y = y'$. Der Graph von f ist die Teilmenge

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Als nächstes drei Begriffe zum Abbildungsverhalten: $f : X \rightarrow Y$ heißt

<i>injektiv</i>	aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$
<i>surjektiv</i>	zu jedem $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$
<i>bijektiv</i>	f ist injektiv und surjektiv.

¹René Descartes, 1596–1650

Eine äquivalente Definition von f injektiv ist: aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$, siehe oben. Wir haben die obige Formulierung gewählt weil sie leichter zu checken ist.

Ordnen wir jedem Kind seine Mutter zu, so erhalten wir eine Abbildung von der Menge K aller Kinder in die Menge F aller Frauen. Diese Abbildung ist nicht surjektiv, denn nicht jede Frau ist Mutter. Sie ist auch nicht injektiv, denn es gibt Mütter mit mehr als einem Kind.

Was bedeuten diese drei Begriffe für die Lösbarkeit einer Gleichung $f(x) = y$, wobei $f : X \rightarrow Y$ und $y \in Y$ gegeben?

f injektiv es gibt höchstens eine Lösung
f surjektiv es gibt mindestens eine Lösung
f bijektiv es gibt genau eine Lösung.

Die drei Aussagen gelten für jedes $y \in Y$. Sei nun $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann können wir $y \in Y$ die eindeutig bestimmte Lösung von $f(x) = y$ zuordnen. Wir kriegen eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$, $y \mapsto g(y)$, wobei $g(y)$ eben diese Lösung ist, das heißt

$$f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in Y, \text{ also } f \circ g = \text{id}_Y.$$

Wir nennen $g = f^{-1}$ die zu f inverse Abbildung oder einfach Umkehrfunktion. Wählen wir in der letzten Gleichung $y = f(x)$ so folgt $f(g(f(x))) = f(x)$. Wegen f injektiv ergibt sich

$$g(f(x)) = x, \text{ und damit } g \circ f = \text{id}_X.$$

Umgekehrt: angenommen zu $f : X \rightarrow Y$ gibt es eine Funktion $g : Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. Nach der ersten Gleichung ist $g(y)$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = y$:

$$f(g(y)) = \text{id}_Y(y) = y.$$

Nach der zweiten Gleichung ist diese Lösung eindeutig, denn aus $f(x) = y = f(x')$ folgt

$$x' = g(f(x')) = g(f(x)) = x.$$

Somit ist f bijektiv, und g ist die Umkehrfunktion von f . Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt: ist g die Umkehrfunktion von f , so ist f auch die Umkehrfunktion von g , insbesondere ist g ebenfalls bijektiv. Wir erhalten für den Graph der Umkehrfunktion, indem wir $y = f(x)$ substituieren,

$$G_g = \{(y, g(y)) : y \in Y\} = \{(f(x), g(f(x))) : x \in X\} = \{(f(x), x) : x \in X\} \subset Y \times X.$$

Der Graph ergibt sich also durch „Spiegelung an der Winkelhalbierenden“.

2 Zahlen

Wir wiederholen aus der Schule die Gesetze der Addition und Multiplikationen reeller Zahlen, und die Anordnungsgesetze mit Definition des Betrags einer reellen Zahl. Die reellen Zahlen werden durch die Existenz des Supremums charakterisiert. Die rationalen Zahlen bilden eine echte Teilmenge, die aber dicht in den reellen Zahlen liegt.

Aus der Schule kennen wir die Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{natürliche Zahlen} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{ganze Zahlen} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\} && \text{rationale Zahlen} \end{aligned}$$

Manchmal brauchen wir auch $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Für $x \in \mathbb{Q}$ ist die Darstellung $x = p/q$ nicht eindeutig, eine eindeutige Darstellung ergibt sich durch Kürzen. Die reellen Zahlen \mathbb{R} fassen wir als Punkte auf der Zahlengeraden auf. Anstatt eine abstrakte Konstruktion von \mathbb{R} durchzuführen, stellen wir im Folgenden die Regeln (Axiome) in \mathbb{R} zusammen. Die Gesetze der Addition und Multiplikation lauten wie folgt:

$$\begin{array}{l} + \qquad \qquad \qquad \bullet \\ \text{Assoziativgesetz:} \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \text{Kommutativgesetz:} \quad a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a \\ \text{Neutrales Element:} \quad a + 0 = a \quad a \cdot 1 = a \\ \text{Inverses Element:} \quad a + (-a) = 0 \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{falls } a \neq 0 \\ \text{Distributivgesetz:} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \end{array}$$

Alle bekannten Rechenregeln wie zum Beispiel $(-a)(-b) = ab$ können daraus hergeleitet werden. Wir erwähnen die *Nullteilerfreiheit*:

$$\text{Aus } a \cdot b = 0 \text{ folgt } a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Denn ist $a \neq 0$, so folgt

$$b = \left(\frac{1}{a} \cdot a \right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

Den Punkt bei der Multiplikation lassen wir meistens weg. Auch die Regeln der Bruchrechnung lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten, wir listen sie hier auf:

Satz 2.1 (Bruchrechnung) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d \neq 0$ gilt:

- (1) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$ (Gleichnamig machen von Brüchen),
- (2) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$ (Multiplikation von Brüchen),
- (3) $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$, falls zusätzlich $b \neq 0$ (Division von Brüchen).

Als nächstes erklären wir die Anordnung von \mathbb{R} . Die Ungleichung $a < b$ bedeutet auf der Zahlengeraden, dass a links von b liegt bzw. $a - b$ links von Null. Offenbar gilt genau eine der Relationen $a < b$, $a > b$ oder $a = b$. Hier einige Regeln:

- Aus $a, b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.
- Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (*Transitivität*).
- Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $a + c > b + d$ (*Addition von Ungleichungen*)
- Aus $a > b$ folgt $\begin{cases} ac > bc & \text{falls } c > 0 \\ ac < bc & \text{falls } c < 0 \end{cases}$ (*Multiplikation mit einer Zahl*).

Dass sich in der letzten Regel das Vorzeichen umdreht ist eine häufige Fehlerquelle. Wir wollen diese und weitere Regeln nicht herleiten. Eine wichtige Konsequenz ist jedenfalls: *Quadrate in \mathbb{R} sind nichtnegativ*, denn

$$a^2 = \begin{cases} a \cdot a > 0 & \text{im Fall } a > 0, \\ (-a) \cdot (-a) > 0 & \text{im Fall } -a > 0. \end{cases}$$

Definition 2.1 *Der Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Für $a = 0$ ergibt sich jeweils $|a| = 0$, aus praktischen Gründen haben wir den Overlap der beiden Fälle hier erlaubt. Auf der Zahlengeraden ist $|a|$ der Abstand zum Nullpunkt. Die Definition hat folgende Konsequenz: Wenn Sie ein Betragszeichen beseitigen möchten, müssen Sie eine Fallunterscheidung machen, je nachdem ob der Term in den Betragsstrichen positiv oder negativ ist.

Satz 2.2 (Rechnen mit Beträgen) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:*

- (1) $a \leq |a|$.
- (2) $|-a| = |a|$.
- (3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- (4) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- (5) $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

BEWEIS: Im Fall $a \geq 0$ ist $a = |a|$, andernfalls ist $a \leq 0 \leq |a|$, dies zeigt Aussage (1). Auch (2) folgt direkt aus Definition 2.1, denn

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{falls } -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases} = |a|.$$

In (3) bleiben die linke und rechte Seite gleich, wenn wir a durch $-a$ ersetzen, dasselbe gilt bezüglich b . Also können wir $a, b \geq 0$ annehmen, und erhalten $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$ wie verlangt. Für (4) schätzen wir mit (1) wie folgt ab:

$$|a + b| = \pm(a + b) = \pm a + (\pm b) \leq |a| + |b|.$$

Schließlich gilt $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ nach (4), also $|a - b| \geq |a| - |b|$. Durch Vertauschen von a und b folgt (5). \square

Wir liegen die rationalen Zahlen in \mathbb{R} drin? Das regelt das *Archimedische Axiom*:

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$.

Es gibt dann auch zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > K$. Für $K \leq 0$ ist das sowieso klar. Im Fall $K > 0$ wähle oben $\varepsilon = 1/K > 0$, und erhalte ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < 1/K$ bzw. $n > K$.

Eine wichtige Konsequenz ist, dass die rationalen Zahlen auf der Zahlengerade \mathbb{R} dicht verteilt sind. Um das zu formulieren führen wir folgende Bezeichnungen für Intervalle mit Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ ein:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{linksseitig abgeschlossen, rechtsseitig offen} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{linksseitig offen, rechtsseitig abgeschlossen} \\ |I| &= b - a \text{ für ein Intervall } I && \text{Intervalllänge} \end{aligned}$$

Es ist praktisch, $+\infty$ und $-\infty$ als *offene* Intervallgrenzen zuzulassen, zum Beispiel ist $(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq 1\}$.

Satz 2.3 (\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in (a, b)$.

BEWEIS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < b - a$. Die Zahlen k/n , $k \in \mathbb{Z}$, sind rational und bilden ein Gitter, mit Gitterlänge kleiner als $b - a$. Sei k/n minimal mit $k/n > a$. Dann folgt

$$\frac{k}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b, \quad \text{also } q = \frac{k}{n} \in (a, b).$$

□

Der zentrale Begriff der Analysis ist der Grenzwert. Wir betrachten hier den Fall des Grenzwerts einer Zahlenfolge a_n , also a_1, a_2, a_3, \dots

Definition 2.2 (Konvergenz) Die Folge a_n konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n > K$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge, wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

In der Schule wird das eher in Worten ausgedrückt: zum Beispiel a_n strebt gegen a , oder etwas genauer die Abweichung zwischen a_n und a wird klein. Wir brauchen aber eine präzise, quantitative Formulierung, um damit zu argumentieren. Die Zahl $\varepsilon > 0$ gibt die Genauigkeit vor, wie groß der Unterschied zwischen a_n und a höchstens sein soll. In der Regel werden die ersten Folgenglieder das nicht leisten. Die Zahl K gibt an, ab wann die verlangte Genauigkeit erfüllt ist. Es kommt nicht darauf an K optimal zu wählen, Hauptsache für alle $n > K$ gilt die Sache. Für eine bessere Genauigkeit, also kleineres $\varepsilon > 0$, muss typischerweise ein größeres K genommen werden. Hier ein einfaches Beispiel.

Beispiel 2.1 Die Folge $a_n = 1/n$ konvergiert gegen $a = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben, wir wählen $K = 1/\varepsilon$. Es folgt für alle $n > K$

$$|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n < 1/K = \varepsilon.$$

Wir werden später auf die Definition zurückkommen, hier geht es erstmal um die Charakterisierung der reellen Zahlen. Der Unterschied zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{R} besteht darin, dass wir in \mathbb{R} beliebige Grenzprozesse durchführen können, die Existenz der Grenzwerte ist garantiert. Zum Beispiel können wir Schritt für Schritt die Ziffern der Dezimalentwicklung der Zahl $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ bestimmen. Im ersten Schritt ist $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$, also nehmen wir die 1. Im zweiten Schritt ist $1,4^2 = 1,96$ zu klein, $1,5^2 = 2,25$ zu groß, also kommt die 4. Auf diese Weise erhalten wir zwei Folgen, eine wachsende a_n eine fallende b_n :

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{Näherungen von } \sqrt{2} : & a_n & 1 & 1,4 & 1,41 & 1,414 & 1,4142 & \dots \\ & b_n & 2 & 1,5 & 1,42 & 1,415 & 1,4143 & \dots \\ & b_n - a_n & 1 & 0,1 & 0,01 & 0,001 & 0,0001 & \dots \end{array}$$

In \mathbb{R} haben beide Folgen denselben Grenzwert, nämlich die Zahl $\sqrt{2}$. Das ist der Vorteil gegenüber \mathbb{Q} , denn die Folgen haben keinen Grenzwert in \mathbb{Q} . Dieser müsste eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ sein, aber in \mathbb{Q} hat diese Gleichung keine Lösung, das zeigen wir unten.

Um die Konvergenz einer Folge mit Definition 2.2 zu zeigen, muss man den Grenzwert a schon kennen. Es kommt aber oft vor, dass eine Zahl durch einen Grenzwert erst definiert wird, zum Beispiel die Eulersche Zahl $e = 2,71828\dots$. Dafür brauchen wir eine Modifikation des Konzepts der Konvergenz, in der der Grenzwert selbst nicht vorkommt. Die Idee ist, die Glieder der Folge nicht mit dem a priori unbekanntem Grenzwert zu vergleichen, sondern *untereinander*.

Definition 2.3 (Cauchyfolge) ² Eine Folge a_n heißt Cauchyfolge, wenn gilt:

$$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } K \in \mathbb{R}, \text{ so dass } |a_m - a_n| < \varepsilon \text{ für alle } m > n > K.$$

Zum Beispiel ist die Folge a_n in der Approximation von $\sqrt{2}$ eine Cauchyfolge. Denn für $m > n$ gilt $a_m \geq a_n$ und $b_m \leq b_n$, außerdem ist $a_m \leq b_m$ für alle m . Also folgt für $m > n$

$$0 \leq a_m - a_n \leq b_m - a_n \leq b_n - a_n \leq 10^{-n+1} < \varepsilon \quad \text{für } n \text{ groß.}$$

Die Existenz von Grenzwerten in \mathbb{R} wird nun wie folgt formuliert:

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchyfolge konvergiert, das heißt hat einen Grenzwert.

Wir haben damit alle Axiome in \mathbb{R} zusammen. Das Konzept der Konvergenz und Vollständigkeit ist nicht trivial. Wir werden uns später weiter damit beschäftigen. Zum Ende des Abschnitts kommen wir auf die Unlösbarkeit der Gleichung $x^2 = 2$ in \mathbb{Q} zurück.

Angenommen es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Dann können wir $x > 0$ annehmen (ersetze x durch $-x$), also $x = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Wir können weiter annehmen, dass p und q nicht beide gerade sind. Andernfalls kürzen wir den Bruch so oft durch 2 bis das der Fall ist. Bei jedem Kürzen verkleinern sich Zähler und Nenner, also ist nach endlich vielen Schritten

²A.L. Cauchy, 1789–1857

der Zähler oder Nenner ungerade. Nun folgt aus $x^2 = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{q^2} = 2 &\Rightarrow p^2 = 2q^2, \text{ also } p^2 \text{ gerade} \\ &\Rightarrow p \text{ gerade, also } p = 2p' \text{ mit } p' \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2} = 2(p')^2, \text{ also } q^2 \text{ gerade} \\ &\Rightarrow q \text{ gerade.}\end{aligned}$$

Also sind p, q doch beide gerade, ein Widerspruch. Wir haben benutzt, dass für p^2 gerade auch p gerade ist. Denn für p ungerade, also mit Endziffer 1,3,5,7,9, hat p^2 die Endziffer 1,9,5,9,1, ist also ungerade.

3 Vollständige Induktion

Wir behandeln das Prinzip der vollständigen Induktion. Erste Beispiele sind die Formeln für die arithmetische und geometrische Summe. Danach beschäftigen wir uns mit dem Zählen, und bestimmen die Anzahl von Permutationen und Kombinationen.

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion beruht auf folgendem Prinzip:

Sei $A(n)$ eine Folge von Aussagen für $n \in \mathbb{N}$. Es gelte:

- (1) $A(1)$ ist wahr.
- (2) $A(n-1)$ ist wahr $\Rightarrow A(n)$ ist wahr.

Dann sind alle Aussagen $A(n)$ wahr.

Ein Induktionsbeweis funktioniert also in zwei Schritten: erst wird die Aussage $A(n)$ für den Fall $n = 1$ verifiziert (Induktionsanfang). Dann wird *vorausgesetzt*, dass $A(n-1)$ richtig ist (Induktionsannahme), und daraus $A(n)$ hergeleitet (Induktionsschluss). Dazu kann man $n \geq 2$ annehmen, denn $A(1)$ ist ja schon bekannt. Das Verfahren spielt eine wesentliche Rolle bei Rekursionen. Betrachten wir zum Beispiel die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $S_n = 1 + 2 + \dots + n$. Diese ergibt sich rekursiv wie folgt:

$$S_1 = 1, \quad S_n = S_{n-1} + n \quad \text{für } n \geq 2.$$

Offenbar liefert die Rekursion

$$S_1 = 1, \quad S_2 = S_1 + 2 = 3, \quad S_3 = S_2 + 3 = 6, \dots$$

Wir behaupten dass folgende allgemeine Formel gilt:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für $n = 1$ stimmt das. Und wenn die Formel für $n-1$ gilt so folgt

$$S_n = S_{n-1} + n = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + n = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Damit ist die Formel bewiesen, und sogar ziemlich einfach. Das ist durchaus typisch für die Induktion: das Problem ist eher die richtige Formel zu finden, der Beweis per Induktion geht dann nach Schema F. Übrigens hat Gauß im Alter von 5 Jahren die Formel so gezeigt :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + \dots + n \\ S_n &= n + n-1 + \dots + 1 \quad \text{also } 2S_n = n(n+1). \\ 2S_n &= n+1 + n+1 + \dots + n+1 \end{aligned}$$

Betrachten wir als zweites Beispiel die geometrische Summe, das ist die Summe der ersten $n+1$ Potenzen einer Zahl x , genauer $S_n = x^0 + x^1 + \dots + x^n$. Es ist praktisch bei $x^0 = 1$ anzufangen. Der Fall $x = 1$ ist klar, also nehmen wir $x \neq 1$ an. Die Rekursion lautet

$$S_0 = x^0 = 1, \quad S_n = S_{n-1} + x^n.$$

Es geht also statt bei $n = 1$ bei $n = 0$ los, die ersten paar Schritte lauten

$$S_1 = S_0 + x^1 = 1 + x, \quad S_2 = S_1 + x^2 = 1 + x + x^2, \quad S_3 = S_2 + x^3 = 1 + x + x^2 + x^3, \dots,$$

Wir zeigen nun die allgemeine Formel

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{für } x \neq 1.$$

Für $n = 0$ steht rechts Eins, das stimmt. Angenommen die Formel gilt für S_{n-1} , dann folgt

$$S_n = S_{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{(n-1)+1}}{1 - x} + x^n = \frac{1 - x^n + (1 - x)x^n}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Auch hier gibt es einen Trick, wie man die Summe ohne Induktion ausrechnen kann:

$$\begin{aligned} 1 - x^{n+1} &= (1 + x + \dots + x^{n-1} + x^n) - (x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1}) \\ &= (1 - x) + (x - x^2) + \dots + (x^n - x^{n+1}) \\ &= (1 - x)(1 + x + \dots + x^n). \end{aligned}$$

Wir notieren die beiden Formeln nochmal mit dem Summenzeichen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{k=0}^n x^k &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{wobei } x \neq 1. \end{aligned}$$

Hinter dem Summenzeichen steht die Formel für den k -ten Summanden. Unter dem Summenzeichen ist angegeben, wo der Laufindex k startet, über dem Summenzeichen steht die obere Grenze für den Laufindex k .

Ebenfalls mit vollständiger Induktion zeigen wir folgende nützliche Ungleichung.

Satz 3.1 (Bernoullische Ungleichung) Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

BEWEIS: Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ gilt nach Definition $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$. Wegen $1+x \geq 0$ folgt weiter für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= (1+x) \cdot (1+x)^{n-1} \\ &\geq (1+x) \cdot (1+(n-1)x) \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= 1 + nx + (n-1)x^2 \\ &\geq 1 + nx. \end{aligned}$$

□

Wir wollen als nächstes die Elemente gewisser Mengen zählen. Als erstes zeigen wir: wenn man vier Paar Socken in eine Kommode mit drei Schubladen packt, müssen zwei Paare in dieselbe Schublade. Das geht natürlich auch mit Briefen und Briefkästen. Dieses sogenannte *Schubfachprinzip* wurde zuerst von G. L. Dirichlet (1805-1859) festgestellt.

Satz 3.2 *Ist $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ injektiv mit $m, n \in \mathbb{N}$, so folgt $m \leq n$.*

BEWEIS: durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ haben wir $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1\}$ injektiv, das geht nur für $m = 1$. Sei nun eine injektive Abbildung $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ gegeben; zu zeigen ist $m \leq n$. Kommt n im Bild von f nicht vor, so bildet f die Menge $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, \dots, n-1\}$ injektiv ab. Nach Induktion folgt dann $m \leq n-1$. Andernfalls gibt es genau ein $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $f(k) = n$. Sei $\varphi : \{1, \dots, m-1\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ mit

$$\varphi(i) = \begin{cases} i & \text{für } i = 1, \dots, k-1, \\ i+1 & \text{für } i = k, \dots, m. \end{cases}$$

Da $\varphi(i) \neq k$ für alle i bildet $f \circ \varphi$ von $\{1, \dots, m-1\}$ nach $\{1, \dots, n-1\}$ injektiv ab.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & \dots & k-1 & - & k & \dots & m-1 \\ \varphi \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & m \\ f \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & f(1) & \dots & f(k-1) & f(k) = n & f(k+1) & \dots & f(m) \end{array}$$

Per Induktion folgt $m-1 \leq n-1$ und damit $m \leq n$. □

Jetzt kommen wir zum Zählen. Man könnte meinen dass wir dazu gar nichts sagen müssen, wir können das ja alle seit wir kleine Kinder sind. Aber wir brauchen ein Konzept dass wir zum Beispiel auch als Programm implementieren können, und in mathematischen Argumenten benutzen können. Darum müssen wir die Sache formalisieren. Letztlich machen wir aber nichts anderes als mein Enkel Theo, der stolz ist dass er schon 10 Dinge abzählen kann.

Definition 3.1 (Zahl der Elemente) *Sei M eine Menge. Gibt es $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ bijektiv für ein $n \in \mathbb{N}$, so heißt M endlich und $n = \#M$ ist die Anzahl seiner Elemente. Die leere Menge ist ebenfalls endlich mit $\#\emptyset = 0$.*

Dass die Zahl der Elemente eindeutig definiert ist, folgt aus dem Schubfachprinzip.

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, n\} & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ g^{-1} \circ f & & M \\ \downarrow & \nearrow g & \\ \{1, \dots, m\} & & \end{array}$$

Sind f und g bijektiv, so ist $g^{-1} \circ f$ injektiv und damit $n \leq m$ nach dem Schubfachprinzip. Analog folgt $m \leq n$.

Jetzt wollen wir das anwenden. Wir wollen als erstes die Anzahl der Anordnungen (oder Umordnungen oder Permutationen) von n Dingen bestimmen. Für $n = 2$ gibt es zwei Möglichkeiten, für $n = 3$ sechs:

$$\begin{array}{cccc} 12 & 123 & 231 & 312 \\ 21 & 213 & 321 & 132 \end{array}$$

Für die allgemeine Antwort brauchen wir folgende Notation (wir setzen $0! = 1$):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n\text{-Fakultät}).$$

Satz 3.3 (Zahl der Permutationen) Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Menge der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Dann gilt $\#S_n = n!$.

BEWEIS: Wir zeigen die Behauptung durch Induktion, wobei der Induktionsanfang $n = 1$ offensichtlich ist. Sei $S_{n,k}$ die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$, die die Nummer k auf n abbilden. Da die restlichen $n-1$ Nummern beliebig bijektiv auf $\{1, \dots, n-1\}$ abgebildet werden, hat $S_{n,k}$ genau $(n-1)!$ Elemente nach Induktion. Es folgt durch Summation

$$\#S_n = \#S_{n,1} + \dots + \#S_{n,n} = n \cdot (n-1)! = n!.$$

□

Definition 3.2 (Binomialkoeffizienten) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad \text{sowie} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Lemma 3.1 (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ erfüllen die Binomialkoeffizienten die Formel

$$\binom{\alpha + 1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}.$$

BEWEIS: Für $k = 1$ ist leicht zu sehen, dass die Formel richtig ist. Für $k \geq 2$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 2) \cdot (\alpha - k + 1 + k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \frac{(\alpha + 1) \cdot \alpha \cdot \dots \cdot ((\alpha + 1) - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \binom{\alpha + 1}{k}. \end{aligned}$$

□

Im Fall $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ erlaubt Lemma 3.1 die rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ nach dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662).

n=0								1						
n=1								1	1					
n=2								1	2	1				
n=3								1	3	3	1			
n=4								1	4	6	4	1		
n=5								1	5	10	10	5	1	
n=6								1	6	15	20	15	6	1

Ebenfalls für $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ folgt durch Erweitern der Binomialkoeffizienten mit $(n - k)!$ die alternative Darstellung

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \tag{3.2}$$

und daraus weiter die am Diagramm ersichtliche Symmetrieeigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \tag{3.3}$$

Worum geht's nun? Nehmen wir an auf einer Party mit n Leuten wird mit Sekt angestossen, wie oft insgesamt? Für kleine n können wir das leicht ermitteln:

$$\begin{array}{cccccc} n = 1 & n = 2 & n = 3 & n = 4 & n = 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 + 3 = 6 & 6 + 4 = 10 \end{array}$$

Wir könnten uns auch fragen, wieviele Trios wir aus n GeigerInnen bilden können. Allgemein:

Satz 3.4 (Zahl der Kombinationen) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gleich $\binom{n}{k}$.

BEWEIS: durch Induktion über n . Es gilt $\binom{n}{0} = 1$ nach Definition, und die einzige null-elementige Teilmenge von $\{0, 1, \dots, n\}$ ist die leere Menge. Also stimmt die Aussage für alle $n = 0, 1, \dots$ und $k = 0$. Die k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ mit $k \geq 1$ zerfallen in zwei Klassen:

Typ 1: Die Menge enthält die Nummer n nicht.

Typ 2: Die Menge enthält die Nummer n .

Typ 1 besteht genau aus den k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n - 1\}$, nach Induktion sind das $\binom{n-1}{k}$ Stück. Die Mengen vom Typ 2 ergeben sich aus den $(k - 1)$ -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n - 1\}$, indem wir n dazutun. Davon gibt es nach Induktion $\binom{n-1}{k-1}$ Stück. Die Gesamtzahl ist also nach Lemma 3.1

$$\binom{n - 1}{k} + \binom{n - 1}{k - 1} = \binom{n}{k}.$$

□

Satz 3.5 (Binomische Formel) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (3.4)$$

BEWEIS: Multiplizieren wir das n -fache Produkt $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)$ aus und ordnen nach den Potenzen von a, b so ergibt sich eine Summe von Termen der Form $a^k b^{n-k}$ mit $0 \leq k \leq n$. Wir erhalten den Term $a^k b^{n-k}$ genau dann, wenn wir in k Klammern a nehmen und in den anderen b . Für die Wahl der a -Klammern gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten nach Satz 3.4, so oft kommt also der Term $a^k b^{n-k}$ Term vor. \square

4 Geometrie im \mathbb{R}^n

In den Studiengängen Physik oder Mikrosystemtechnik werden schon zu Anfang ein paar grundlegende geometrische Begriffe benutzt, diese werden hier erklärt. Dazu gehören die Wahl von Koordinaten in einer Ebene oder im Raum, die Euklidische Länge, das Skalarprodukt und der Winkel zwischen Vektoren. Wir zeigen auch die Ungleichung von Cauchy-Schwarz und die Dreiecksungleichung. Auf \mathbb{R}^3 definieren wir schließlich das Kreuzprodukt.

Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$, zum Beispiel $n = 2$ oder $n = 3$. Wir bezeichnen mit \mathbb{R}^n das n -fache kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, also die Menge aller n -Tupel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann gleich, wenn alle Komponenten gleich sind, also $x_i = y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Größen wie zum Beispiel Geschwindigkeit, Impuls, Beschleunigung oder Feldstärke werden auch durch n -Tupel im \mathbb{R}^n beschrieben, jedenfalls im Fall $n = 3$. Man spricht dann von Vektoren statt von Punkten, und oft verwendet man die Notation \vec{x} statt x . Die Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren ist in den Anwendungen unter Umständen wichtig, darum wird die Notation mit dem Pfeil benutzt. Für uns ist das weniger relevant, und die Schreibweise mit den Pfeilen wäre schwierig durchzuhalten, daher schreibe ich Vektoren ohne den Pfeil. Zum Beispiel können wir Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (zum Beispiel strecken):

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

In diesem Zusammenhang nennt man die Zahl λ auch einen Skalar, und spricht von Skalarmultiplikation. Die Standard-Einheitsvektoren sind

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Mit ihnen ergibt sich für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfüllen folgende Regeln, die alle direkt aus den Definitionen folgen:

- (1) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (2) $x + 0 = x$ für alle x , wobei $0 = (0, \dots, 0)$ (Nullvektor)
- (3) Es gilt $x + (-x) = 0$
- (4) $x + y = y + x$
- (5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- (6) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- (7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- (8) $1 \cdot x = x$.

Ist $u \in \mathbb{R}^n$ nicht der Nullvektor, so nennen wir die Menge der Punkte $x = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, die von u aufgespannte Gerade. Hier ist λ eindeutig. Denn sei $\lambda_1 u = \lambda_2 u$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann folgt

$$0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 u - \lambda_2 u) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2)u = u, \quad \text{Widerspruch.}$$

Wir nennen λ die Koordinate von x bezüglich u . Ähnliches gilt mit zwei Vektoren: sei $u_1 \neq 0$ und u_2 sei nicht auf der Geraden die durch u_1 aufgespannt wird. Dann nennen wir die Menge der Vektoren $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ mit $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ die durch u_1, u_2 aufgespannte Ebene. Die Koordinaten $\lambda_{1,2}$ sind wieder eindeutig: angenommen es ist $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$, bzw.

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 = 0.$$

Wäre $\lambda_2 \neq \mu_2$ so hätten wir

$$u_2 = -\frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_2 - \mu_2}u_1.$$

Das bedeutet, u_2 liegt auf der von u_1 aufgespannten Geraden, Widerspruch. Also ist $\lambda_2 = \mu_2$, und weiter folgt leicht $\lambda_1 = \mu_1$. Das geht auch mit drei Vektoren: angenommen u_1, u_2 spannen eine Ebene auf, und u_3 liegt nicht auf dieser Ebene. Dann nennen wir die Menge der Punkte $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ mit $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ den durch u_1, u_2, u_3 aufgespannten Raum. Im Fall $n = 3$ ist das der ganze \mathbb{R}^3 , im Fall $n \geq 4$ ist es ein drei-dimensionaler Unterraum. Die Koordinaten sind wieder eindeutig: angenommen es ist

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 + (\lambda_3 - \mu_3)u_3 = 0.$$

Wäre $\lambda_3 \neq \mu_3$ so hätten wir

$$u_3 = -\frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_3 - \mu_3}u_1 - \frac{\lambda_2 - \mu_2}{\lambda_3 - \mu_3}u_2.$$

Das heißt u_3 liegt in der durch u_1, u_2 aufgespannten Ebene, Widerspruch. Also gilt $\lambda_3 = \mu_3$, und $\lambda_{1,2} = \mu_{1,2}$ folgt wie oben. Ist G die von u aufgespannte Gerade, so nennen wir u eine Basis von G . Analog sind u_1, u_2 eine Basis der aufgespannten Ebene E , und u_1, u_2, u_3 eine Basis des aufgespannten Raums V . Eine solche Basis ist nicht eindeutig bestimmt, zum Beispiel wird G auch durch $2u$ oder $-u$ aufgespannt. Die Koordinaten sind nicht die Standardkoordinaten des Punkts x , sondern sie hängen von der Basis ab. Ist x ein Punkt auf G, E oder V , so stellt sich die Frage wie man die Koordinaten von x bezüglich der gegebenen Basis bestimmt. Dazu muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, das werden wir später besprechen.

Die Euklidische Länge (oder die Euklidische Norm) eines Vektors ist definiert durch

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Definition leitet sich aus dem Satz des Pythagoras ab (Bild), es gilt

$$|x| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } n = 2, \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \text{für } n = 3. \end{cases}$$

Offenbar gelten für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Regeln

$$|x| \geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für } x = 0) \quad \text{sowie} \quad |\lambda x| = |\lambda| |x|.$$

Der Euklidische Abstand von zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Euklidische Länge $|x|$ ist also der Abstand zum Nullpunkt. Eine weitere nützliche Größe ist das Skalarprodukt zwischen Vektoren im \mathbb{R}^n :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

Man schreibt das Skalarprodukt auch oft in der Form $x \cdot y$, also mit einem Punkt. Wir bleiben aber bei den Klammern. Folgende Regeln ergeben sich direkt aus der Definition, wobei $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle && \text{(Symmetrie)} \\ \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle && \text{(Bilinearität)} \\ \langle x, x \rangle &= |x|^2 \geq 0 && \text{(Positivität)}. \end{aligned}$$

Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Im Dreieck mit Eckpunkten $0, x$ und y gilt dann der Satz des Pythagoras:

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 = |x|^2 + |y|^2,$$

das heißt im Nullpunkt ist ein rechter Winkel. Für eine Gerade, eine Ebene oder einen Raum wie oben können wir mithilfe des Skalarprodukts spezielle Basen wählen. Wir erklären das zuerst für eine Ebene E . Eine Basis v_1, v_2 von E heißt Orthonormalbasis, wenn

$$|v_1| = |v_2| = 1 \quad \text{und} \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Die Vektoren sind also auf Eins normiert und zueinander senkrecht. Sei u_1, u_2 irgendeine Basis von E , dann können wir daraus eine Orthonormalbasis konstruieren. Und zwar sei

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|}.$$

Das geht denn u_1 ist nicht der Nullvektor. Dann bestimmen wir $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $u_2 + \lambda v_1$ senkrecht zu v_1 ist:

$$0 \stackrel{!}{=} \langle u_2 + \lambda v_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle + \lambda, \quad \text{also } \lambda = -\langle u_2, v_1 \rangle.$$

Durch Normierung ergibt sich schließlich

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1|}.$$

Hier brauchen wir dass $u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$ nicht der Nullvektor ist. Aber wäre das der Fall, so liegt u_2 auf der durch v_1 bzw. u_1 aufgespannten Geraden, und u_1, u_2 wäre keine Basis von E . Bezüglich einer Orthonormalbasis v_1, v_2 von E können wir die Koordinaten eines Punkts $x \in E$ direkt angeben. Denn ist $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ so folgt

$$\begin{aligned} \langle x, v_1 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_1 \rangle = \lambda_1, \\ \langle x, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_2 \rangle = \lambda_2. \end{aligned}$$

Das ist also einfacher als bei einer beliebigen Basis. Es folgt die Darstellung

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 \quad \text{für alle } x \in E.$$

Für eine Gerade G ist eine Orthonormalbasis einfach ein Vektor auf G mit Länge $|v| = 1$, und jedes $x \in G$ hat die Darstellung $x = \langle x, v \rangle v$. Für einen dreidimensionalen Raum V ist eine Orthonormalbasis durch drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in V gegeben mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Die Vektoren sind also normiert und stehen paarweise aufeinander senkrecht. Für $x \in V$ ergibt sich wie im Fall der Ebene die Darstellung

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \langle x, v_3 \rangle v_3.$$

Analog zur Ebene kann man aus einer beliebigen Basis eine Orthonormalbasis herstellen.

Wir wollen nun den Winkel $\sphericalangle(v, w) \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ definieren. Zur Motivation betrachten wir im \mathbb{R}^2 die Kreisbewegung

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Es gilt $|c(t)| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1$ und $c(0) = (1, 0)$. Der Punkt $c(t)$ bewegt sich auf dem Einheitskreis entgegen dem Uhrzeigersinn mit Absolutgeschwindigkeit Eins:

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |c'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$

Ein Kreisbogen $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $|\alpha - \beta| \leq \pi$ hat also genau die Länge $|\alpha - \beta|$, und das ist der Winkel zwischen $c(\alpha)$ und $c(\beta)$. Die Bedingung $|\alpha - \beta| \leq \pi$ bedeutet, dass der Bogen höchstens ein Halbkreis ist. Mit dem Additionstheorem des Kosinus (Schulwissen) folgt

$$\cos \sphericalangle(c(\alpha), c(\beta)) = \cos |\alpha - \beta| = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \langle c(\alpha), c(\beta) \rangle.$$

Definition 4.1 (Winkel zwischen Vektoren) *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beide nicht null. Dann definieren wir den Winkel $\phi = \sphericalangle(x, y) \in [0, \pi]$ durch die Gleichung*

$$\cos \phi = \left\langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right\rangle.$$

Es ist zu begründen, dass der Winkel ϕ durch die Gleichung eindeutig definiert ist. Die Funktion Kosinus ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ (Bild). Sie nimmt daher jeden Wert in $[-1, 1]$ genau einmal an. Es bleibt zu zeigen, dass die rechte Seite in der Definition des Winkels im Intervall $[-1, 1]$ liegt. Dies ergibt sich aus folgender Ungleichung.

Satz 4.1 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz) *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|.$$

Gleichheit genau dann, wenn x, y (gleichsinnig oder entgegengesetzt) parallel sind.

BEWEIS: Wir betrachten erst Vektoren a, b mit $|a| = |b| = 1$. Es gilt

$$1 \pm \langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 \pm 2\langle a, b \rangle) = \frac{1}{2} |a \pm b|^2 \geq 0.$$

Also ist $|\langle a, b \rangle| \leq 1$. Für $x, y \neq 0$ beliebig wenden wir das an mit $a = \frac{x}{|x|}$, $b = \frac{y}{|y|}$:

$$|\langle x, y \rangle| = |x| |y| |\langle a, b \rangle| \leq |x| |y|.$$

Bei Gleichheit gilt für die Einheitsvektoren

$$0 = a \pm b = \frac{x}{|x|} \pm \frac{y}{|y|},$$

das heißt x und y sind parallel. □

Der Kosinussatz ergibt sich hier trivial: im Dreieck mit Ecken $0, x, y$ gilt nämlich

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \sphericalangle(x, y).$$

Wir zeigen nun eine fundamentale Eigenschaft der Euklidischen Länge.

Satz 4.2 (Dreiecksungleichung) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Ungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

Gleichheit genau wenn x, y gleichsinnig parallel.

BEWEIS: Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Durch Wurzelziehen folgt $|x + y| \leq |x| + |y|$. Bei Gleichheit müssen x und y parallel sein nach Satz 4.1. Es muss aber auch $\langle x, y \rangle \geq 0$ sein, also sind x, y gleichsinnig parallel. \square

In einem Dreieck ist eine Seite immer kürzer als die Summe der anderen beiden. Hier bilden die Punkte $0, x$ und $x + y$ ein Dreieck mit Seiten $|x|, |y|$ und $|x + y|$, daher die Bezeichnung.

Für eine beliebige Basis v_1, v_2 einer Ebene E haben wir die Abbildung

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow E, \phi(x) = x_1 v_1 + x_2 v_2 \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear, das heißt es gilt

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \text{und} \quad \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x).$$

Da v_1, v_2 eine Basis ist, hat jedes $v \in E$ eine eindeutige Koordinatendarstellung $v = \phi(x)$, also ist ϕ bijektiv. Sei nun v_1, v_2 eine Orthonormalbasis. Dann ist ϕ eine Isometrie, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|\phi(x)| = |x| \quad \text{und} \quad \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Das lässt sich leicht nachrechnen, und zwar gilt

$$\begin{aligned} |\phi(x)|^2 &= |x_1 v_1 + x_2 v_2|^2 = x_1^2 + x_2^2 = |x|^2, \\ \langle \phi(x), \phi(y) \rangle &= \langle x_1 v_1 + x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Da der Winkel durch das Skalarprodukt bestimmt ist, folgt auch $\sphericalangle(\phi(x), \phi(y)) = \sphericalangle(x, y)$.

Wir kommen schließlich zu einer speziellen Struktur im \mathbb{R}^3 , dem Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt). Auf der Standardbasis setzen wir

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= -e_2 \times e_1 = e_3 \\ e_2 \times e_3 &= -e_3 \times e_2 = e_1 \\ e_3 \times e_1 &= -e_1 \times e_3 = e_2. \end{aligned}$$

Man nennt die Permutationen 123, 231, 312 zyklisch, und 213, 321, 132 antizyklisch. Das Kreuzprodukt beliebiger Vektoren x, y definieren wir durch Ausmultiplizieren, also

$$\begin{aligned} x \times y &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \times (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3 \\ &= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachten Sie dass das Skalarprodukt von zwei Vektoren eine reelle Zahl ist, das Kreuzprodukt aber wieder ein Vektor. Folgende Regeln sind offensichtlich:

$$\begin{aligned}x \times y &= -y \times x && \text{(Schiefsymmetrie)} \\(\lambda x + \mu y) \times z &= \lambda x \times z + \mu y \times z && \text{(Bilinearität)}.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $x \times x = 0$. Wir wollen den Vektor $x \times y$ jetzt geometrisch charakterisieren. Als erstes berechnen wir dazu seine Länge (nachprüfen)

$$\begin{aligned}|x \times y|^2 &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 \\&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\&= |x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2.\end{aligned}$$

Mit $\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \sphericalangle(x, y)$ (der Definition des Winkels) ergibt sich

$$|x \times y| = |x||y| \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle(x, y)} = |x||y| \sin \sphericalangle(x, y).$$

Insbesondere ist $x \times y$ genau dann null wenn x, y parallel sind (oder x bzw. y ist null). Sind x, y orthogonal so folgt $|x \times y| = |x||y|$. Ab jetzt seien x, y nicht parallel und damit $x \times y \neq 0$. Wir berechnen

$$\langle x \times y, z \rangle = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2. \quad (4.1)$$

Ist $z = x$ oder $z = y$, so ist die rechte Seite Null. Also steht $x \times y$ senkrecht auf die von x, y aufgespannte Ebene. Da die Länge schon bekannt ist, bleiben nur zwei Möglichkeiten, die sich um den Faktor -1 unterscheiden.

Die rechte Seite der Gleichung (4.1) ist die Determinante $\det(x, y, z)$. Um sich die Formel zu merken, kann man die Vektoren in ein Schema schreiben und jeweils die Produkte über die Diagonalen bilden. Dabei werden Diagonalen nach Südost positiv, Diagonalen nach Südwest negativ gezählt (Regel von Sarrus).

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array} \right).$$

Die Determinante $\det(x, y, z)$ wird auch als Spatprodukt der drei Vektoren bezeichnet. Sie ist gleich dem Volumen des von den Vektoren gebildeten Spats (Parallelepiped), bis auf Vorzeichen. Wir vereinbaren:

$$x, y, z \text{ sind positiv orientiert, genau wenn } \det(x, y, z) > 0.$$

Hier kommt es auf die Reihenfolge der Vektoren an: werden zwei Vektoren vertauscht, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen. Die Richtung von $x \times y \neq 0$ ist nun dadurch bestimmt, dass $x, y, x \times y$ in dieser Reihenfolge positiv orientiert sind. Denn wählen wir in der Formel für die Determinante $z = x \times y$, so ergibt sich

$$\det(x, y, x \times y) = \langle x \times y, x \times y \rangle = |x \times y|^2 > 0.$$

Anschaulich kann die Orientierung mithilfe der Rechte-Hand-Regel geprüft werden, danach bilden die zueinander senkrechten Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand eine positiv orientierte Basis. Die Charakterisierung des Kreuzprodukts hat folgende Konsequenz: ist v_1, v_2, v_3 irgendeine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 so gilt

$$v_1 \times v_2 = v_3, v_2 \times v_3 = v_1, v_3 \times v_1 = v_2.$$

Das ist aus der Definition mittels Koordinaten nicht direkt ersichtlich.

5 Die komplexen Zahlen

Wir beginnen mit einer anderen Schreibweise für Punkte des \mathbb{R}^2 . Und zwar setzen wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i$, und haben dann die allgemeine Darstellung

$$z = x + iy \quad \text{für alle } z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

In diesem Zusammenhang heißen die Punkte des \mathbb{R}^2 komplexe Zahlen (Symbol \mathbb{C}). Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind gegeben durch

$$\operatorname{Re} z = x \quad \operatorname{Im} z = y \quad \text{für } z = x + iy.$$

Die Addition in \mathbb{C} ist die übliche komponentenweise Addition, also

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Für die Multiplikation setzen wir $i^2 = -1$ und multiplizieren aus:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Um dies zu veranschaulichen, schreiben wir die komplexen Zahlen in Polarkoordinaten: zu jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gibt es ein $r > 0$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dabei ist $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, und $\varphi \in \mathbb{R}$ ist der Winkel, den z mit der positiven x -Achse einschließt (Bild). Da die Funktionen \cos, \sin die Periode 2π haben, ist der Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Er ist eindeutig, wenn wir $\varphi \in [0, 2\pi)$ verlangen.

Für die komplexen Zahlen \mathbb{C} gelten dieselben Rechenregeln wie für die reellen Zahlen. Bezüglich der Addition ist $0 = 0 + i0$ das neutrale Element, und $-z = -x - iy$ das zu $z = x + iy$ inverse Element. Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Addition sind klar, denn diese ist einfach die komponentenweise Addition.

Das neutrale Element der Multiplikation ist $1 = 1 + i0$, denn

$$z \cdot 1 = (x + iy)(1 + i0) = x + iy.$$

Wir nennen $\bar{z} = x - iy$ die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl. Wegen $i^2 = -1$ gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 + i(yx - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Damit können wir das zu $z \neq 0$ inverse Element angeben, und zwar ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad \text{denn } z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

In Polarkoordinaten lautet nun die Multiplikation (Additionstheoreme für \cos, \sin)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Das Kommutativgesetz ist damit klar, und Multiplikation mit $z_3 = r_3(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3)$ liefert

$$(z_1 z_2) z_3 = r_1 r_2 r_3 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)).$$

Für $z_1(z_2 z_3)$ kommt dasselbe raus, also gilt das Assoziativgesetz. Schließlich rechnen wir das Distributivgesetz nach:

$$\begin{aligned} (a + ib)((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) &= (a + ib)(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) \\ &= a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) + i(b(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2)) \\ &= ax_1 - by_1 + i(bx_1 + ay_1) + ax_2 - by_2 + i(bx_2 + ay_2) \\ &= (a + ib)(x_1 + iy_1) + (a + ib)(x_2 + iy_2). \end{aligned}$$

Wir notieren im Vorbeigehen folgende nützliche Formeln, die sich leicht verifizieren lassen. Für die zweite Gleichung in (1) und für (3) kann man die Polardarstellung von $z_{1,2}$ verwenden.

$$(1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2},$$

$$(2) \text{ Für } z = x + iy \text{ ist } \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ und } \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$(3) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Was ist der Gewinn, den wir von den komplexen Zahlen haben? Allgemein gesagt, sind mit den komplexen Zahlen Gleichungen lösbar, die mit reellen Zahlen nicht lösbar sind. Zum Beispiel gibt es keine reelle Lösung von $x^2 + q = 0$, wenn $q > 0$ ist. In \mathbb{C} haben wir dagegen die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm i\sqrt{q}$ (mit \sqrt{q} meinen wir die nichtnegative Wurzel). Jede Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ kann auf das Ziehen einer Wurzel reduziert werden, und hat damit ebenfalls Lösungen. Substituiere dazu $x = y + a$ und berechne

$$0 = (y + a)^2 + p(y + a) + q = y^2 + (2a + p)y + a^2 + pa + q.$$

Durch Wahl von $a = -p/2$ ergibt sich

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$y = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q > 0 \\ \pm i \sqrt{-(\frac{p^2}{4} - q)} & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q < 0 \\ 0 & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q = 0. \end{cases}$$

Durch Rückeinsetzen $x = y - p/2$ ergeben sich die jeweiligen Lösungen für x .

Komplexe Zahlen traten zuerst in der italienischen Renaissance in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts auf, bei der Lösung von quadratischen und kubischen Gleichungen. Die Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$ stammt von Euler (1777), die Bezeichnung *komplexe Zahl* von Gauß (1831). Er hat auch die Interpretation als Punkte in der Ebene eingeführt.