
Aufgabe 1 (*Fundamentallösung*)

(4 Punkte)

Die *Fundamentallösung* der Laplacegleichung ist definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- Φ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, d.h., $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- Es gilt

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS = 1 \text{ für alle } r > 0.$$

- Es gilt $\Phi \in L^1(B_r(0))$ und $\nabla\Phi \in L^1(B_r(0))$ für alle $r > 0$, aber $\nabla^2\Phi \notin L^1(B_r(0))$.

- Es gilt

$$\int_{B_r} |\Phi| dx \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial B_r} |\Phi| dS \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0.$$

Aufgabe 2 (*Transformation*)

(4 Punkte)

Seien $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Q(x) = Bx + c$, und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$-\Delta(u \circ Q) = (L_0 u) \circ Q.$$

Hierbei ist $L_0 := -\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ und a_{ik} sind die Elemente der Matrix $A := BB^t$. Insbesondere gilt also: $\Delta(u \circ Q) = (\Delta u) \circ Q$, wenn B eine orthogonale Matrix ist. Es folgt in diesem Fall: falls u harmonisch ist, ist $u \circ Q$ auch harmonisch.

Aufgabe 3 (*Harmonische Funktionen*)

(4 Punkte)

Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Weiter sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine harmonische Funktion mit den Randwerten $u(x, y) = 1 + 3y^2$ auf $\partial\Omega$. Geben Sie, ohne u explizit zu berechnen, den maximalen Wert von u in $\bar{\Omega}$ und den Funktionswert $u(0)$ an.

Aufgabe 4 (*diskrete harmonische Funktion*)

(4 Punkte)

Eine Funktion $u : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*diskrete*) *harmonische Funktion*, falls gilt:

$$u(i, j) = \frac{1}{4} \{u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1)\}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Diese Eigenschaft wird als Mittelwerteigenschaft bezeichnet.

Angenommen, u nimmt an der Stelle $(0,0)$ sein Maximum an. Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 21.10.2024, 12:15 Uhr vor der Vorlesung.