Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 8.1.2025
Ph.D. X. Zhang

Aufgabe 1 (*radialsymmetrische Lösungen*) (4 Punkte)

Sie zeigen: alle radialsymmetrische Lösungen u von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

haben folgende Form

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - ct) + G(|x| + ct)}{|x|}.$$

Aufgabe 2 (*Invarianz unter der Lorentz-Transformation*) (4 Punkte)

Sei a eine Konstante mit $|a| < 1$. Sie zeigen, dass die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

ist erhalten, unter der *Lorentz-Transformation*

$$\begin{cases} s &= \dfrac{t - a x_1}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_1 &= \dfrac{x_1 - at}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_i &= x_i, \qquad \text{für } i = 2, 3. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*die kinetische und die potentielle Energie*) (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Weiter bezeichne

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)^2 dx, \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)^2 dx$$

die kinetische und bzw. die potentielle Energie der Lösung u zur Zeit t. Man zeige:

a) $t \mapsto k(t) + p(t)$ ist konstant.

b) Für hinreichend große positive Zeiten gilt Gleichheit zwischen potentieller und kinetischer Energie:

$$\exists T_0 > 0 \text{ geeignet} : \forall t \geq T_0 : k(t) = p(t).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Mo., 13.01.2025, 12:15 Uhr