Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 13.1.2025
Ph.D. X. Zhang

Aufgabe 1 (*Wellengleichung* $n = 3$) (4 Punkte)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) &= |x|^k, \ \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

für $k > 0$ (z.B. $k = 2j \in \mathbb{N}$). Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} u(0,t)$ und zeigen Sie, dass die Lösung u die folgende Form

$$u(x,t) = a(x,t)(1 + |x|^k) \quad \text{als } |x| \to \infty$$

hat. Finden Sie $a(x,t)$.

Aufgabe 2 (*eine alternative Lösungsmethode*) (4 Punkte)

Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sei weiter $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= \varphi(x), \ \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \ \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

(a) Für beliebiges $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ definiere ein Vektorfeld ($x \in B_{t_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$) durch

$$V(x) := \left(\frac{Du(x,t)}{|x-x_0|} + u(x,t)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^3} + u_t(x,t)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^2} \right)\Big|_{t=t_0-|x-x_0|}.$$

Sie zeigen, dass

$$\operatorname{div} V = 0.$$

(b) Sie leiten eine Formel für $u(x_0,t_0)$ bzgl. φ und ψ durch Integrieren von $\operatorname{div} V$ in $B_{t_0}(x_0)\backslash B_\epsilon(x_0)$ mit $\epsilon \to 0$.

Diese ist eine alternative Lösungsmethode.

Aufgabe 3 (*Wellengleichung* $n = 2$) (4 Punkte)

Sie lösen das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(x,0) &= |x|^2, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= 1, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (*Abschätzung*) (4 Punkte)

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkt Funktion mit $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$. Für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ definiert

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_t(x)} \frac{\psi(x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

Sie zeigen: für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$\sup_{B_{\alpha t}(0)} |u(\cdot, t)| \leq \frac{C}{t} \sup_{\mathbb{R}^2} |\psi| \qquad \text{für alle } t > 1,$$

wobei C eine positive Konstante, die nur von α abhängt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Mo., 20.01.2025, 12:15 Uhr