Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 20.1.2025
Ph.D. X. Zhang

Aufgabe 1 (*Verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen*) (4 Punkte)

Sei u eine Lösungen von $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}$. u heißt *verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen* von der Wellengleichung, falls u folgende Form

$$u(x,t) = \alpha(r)\phi(t - \beta(r))$$

hat, für $\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \beta : (0,\infty) \to [0,\infty)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\beta(0) = 0$. Hierbei $r = |x|$.
Sie zeigen: Solche verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen existiert nur für $n = 1$ or $n = 3$. Weiter finden Sie die Form von α, β.

Aufgabe 2 (*Abstiegsmethode*) (4 Punkte)

a) Sei $\lambda > 0$ und $u \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = \lambda^2 u \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie die Funktion $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch

$$v(x, x_{n+1}, t) = \{A\cos(\lambda x_{n+1}) + B\sin(\lambda x_{n+1})\}u(x,t).$$

Sie herleiten die Gleichung für v.
b) Sei $\lambda > 0$ und $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= \lambda^2 u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Seperationsansatz*) (4 Punkte)

Mit der Trennungsmethode betrachten Sie das Problem: Sei $L > 0$, $k > 0$ und $f : [0,L] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} + u &= 0 & \text{für } x \in (0,L), t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= f(x), & \text{für } x \in [0,L] \\ u(0,t) &= 0, & \text{für } t > 0 \\ -u_t(L,t) &= u(L,t), & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Ansatz: $u(x,t) = v(x)w(t)$. Sie finden die Gleichungen, und sowie die Randbedingungen für v und w. Sie lösen erste die Gleichung für v für geeignete Λ_k, dann die Gleichung für w für dieselbe Λ_k.

Aufgabe 4 (*Lemma 12.4*) (4 Punkte)

a) Sie zeigen Lemma 12.4.
Lemma 12.4. Sei $u \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}^n$, and $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt

$$\widehat{u(\cdot - a)} = e^{-i\xi \cdot a}\hat{u}(\xi),$$

und

$$\widehat{u(k\,\cdot)}(\xi) = \frac{1}{|k|^n}\hat{u}\left(\frac{\xi}{k}\right)$$

b) Sie berechnen die Fouriertransformierte von $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$u(t) = e^{|t|}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Mo., 27.01.2025, 12:15 Uhr