Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang — 27.1.2025
Ph.D. X. Zhang

Aufgabe 1 (*Seperationsansatz*) (2 Punkte)

Mit der Trennungsmethode finden Sie eine nicht-triviale Lösung (d.h. u nicht konstant ist) von der nicht-linearen PDG:

$$u_{x_1}^2 u_{x_1x_1} + 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + u_{x_2}^2 u_{x_2x_2} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 (*Fouriertransformation und Wellengleichung*) (6 Punkte)

Betrachte das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0,x) = \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Seien $\psi \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ ist die Schwartzsche Klasse) und u eine $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ Lösung mit $u(t,\cdot), u_t(t,\cdot), u_{tt}(t,\cdot) \in \mathcal{S}$. Sei $\hat{u}(\xi)$ die Fouriertransfromierte von u.

(a) Sie zeigen, dass $\hat{u}$ die Gleichung (für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$)

$$\hat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^2\hat{u}(t,\xi) = 0, \quad \hat{u}(0,\xi) = 0, \quad \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi).$$

erfüllt und lösen Sie die Gleichung .

(b) Sei nun $n = 3$. Sie zeigen

$$\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\eta|=t} e^{i\langle\eta,\xi\rangle} dS(\eta) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1} e^{it\langle\eta,\xi\rangle} dS(\eta)$$

(*Hinweis. Erstens zeigen Sie* $\int_{|\eta|=t} e^{i\langle\eta,\xi\rangle} dS(\eta) = \int_{|\eta|=t} e^{i\langle\eta,T\xi\rangle} dS(\eta)$ *für alle* $T \in O(3)$ *(d.h.,* $T^t = T^{-1}$*). Zweitens wählen Sie ein* $T \in O(3)$ *mit* $T\xi = |\xi|(0,0,1)$.)

(c) Mit der umgekehrten Fouriertransformation finden Sie u von $\hat{u}$. ($n = 3$)
(*Hinweis. Benutzen Sie (b).*)

Aufgabe 3 (*wandernde Wellen-Lösung, traveling wave solution*) (4 Punkte)

Sie finden explizite Formeln für v und σ, so dass $u(x,t) := v(\xi - \sigma t)$ eine wandernde Wellen-Lösung der nicht-linearen Diffusion-Gleichung

$$u_t - u_{xx} = f(u),$$

wobei

$$f(z) = -2z^3 + 3z^2 - z.$$

Angenommen: $\lim_{s\to+\infty} v = 1, \lim_{s\to-\infty} v = 0, \lim_{s\to\pm\infty} v' = 0.$

Hinweis: Um σ zu bestimmen multiplizieren Sie $v'' + \sigma v' + f(v) = 0$ mit v' und integrieren.

Aufgabe 4 (*explizite Lösungen*) (3 + 3 Punkte)

a) Sie finden eine Lösung von

$$-\Delta u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \quad \text{in } B_1(0)$$

mit folgender Form $u = \alpha(1 - |x|^2)^{-\beta}$.

b) Sie finden eine Lösung von

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0,$$

mit folgender Form

$$u(x,t) = t^\alpha v(xt^{-\beta}),$$

wobei $\frac{n-2}{n} < \gamma < 1$. Die Lösung soll gegen 0 konvergieren als $|x| \to \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Mo., 27.01.2025, 12:15 Uhr