Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE | WS 24, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang | 21.10.2024
M.Sc. C. Schmidt

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) (*Schwarz´sches Spiegelungsprinzip*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches spiegelsymmetrisch bezüglich der Hyperebene $E := \{x_n = 0\}$ ist, d.h. es gilt:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega \iff (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega.$$

Weiter bezeichne $\Omega^+ := \Omega \cap \{x_n > 0\}$.

Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^0(\overline{\Omega^+})$ harmonisch und $u|_E \equiv 0$, so ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & \text{falls } x_n < 0 \end{cases}$$

in $C^2(\Omega)$ und harmonisch.

(*Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 2.16.*)

b) (*Kelvin-Transformation*)
Es sei $u : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch ($n > 2$). Sei

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

die Kelvin-Transformation von u. Zeigen Sie, dass v auch harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist.

Aufgabe 2 (*harmonische Funktion, Mittelwerteigenschaft*) (6 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert. Zeigen Sie: Dann ist u in Ω harmonisch.

b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: Die Niveaumengen

$$N_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n |\ u(x) = \alpha\}$$

sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ entweder leer oder unbeschränkt.

(*Hinweis: Benutzen Sie die Mittelwerteigenschaft auf größeren Sphären.*)

Aufgabe 3 (*das Maximumprinzip*) (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regulär und beschränkt, sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u &= -1, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \Omega$ folgende Abschätzung gilt:

$$u(x_0) \geq \frac{1}{2n} \inf_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2.$$

(*Hinweis: Betrachten Sie die Funktion* $w(x) = u(x) + \frac{1}{2n}|x - x_0|^2$.)

b) Zeigen Sie:

b1) Wenn $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum von u ist, so gilt: $\Delta u(x_0) \leq 0$.

b2) u genüge $\Delta u = u^3 - u$ und sei am Rand beschränkt: $|u(\partial\Omega)| \leq 1$. Dann gilt: $-1 \leq u \leq 1$ in $\overline{\Omega}$.

Aufgabe 4 (*Harnack'sche Ungleichung und Satz von Liouville*) (3+1 Bonuspunkte)

a) Sei $u \in C^2\big(B_R(0)\big) \cap C^0\big(\overline{B_R(0)}\big)$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

für alle $x \in B_R(0)$.

b) Leiten Sie daraus den Satz von Liouville ab: Eine nach unten (oder oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 28.10.2024., 12:15 Uhr vor der Vorlesung.