Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE WS 24, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang 28.10.2024
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*Greensche Funktion für den Halbraum*) (4 Punkte)
Sei $\Omega := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ der obere Halbraum und Φ die Grundlösung aus der Vorlesung zur Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$. Sei weiter

$$\mathbb{R} \ni (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \tilde{x} := (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

die Spiegelung an der Hyperebene $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$G : \left(\overline{\Omega} \times \Omega\right) \backslash \{(z,z) : z \in \Omega\} \to \mathbb{R}, \quad G(y,x) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

eine Greensche Funktion der Laplace-Gleichung in Ω ist.

b) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \text{ in } \Omega \\ u &= \varphi, \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie Ergebnisse der Vorlesung, ohne deren Gültigkeit für unbeschränkte Gebiete zu prüfen.

Aufgabe 2 (*Äußeres Dirichlet-Problem*) (4+2 Punkte)
Es sei $3 \le n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| > R\}$.

a) Es sei $\varphi \in C^0(\partial B_R)$. Lösen Sie das Dirichletproblem für das Komplement der Kugel B_R, das heißt auf Ω:

$$\begin{cases} u &\in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= \varphi \text{ auf } \partial\Omega \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) &= \mathit{const.} \end{cases} \tag{1}$$

Hinweis. Betrachte die Kelvintransformation $k : \Omega \to B_R \backslash \{0\}$

$$k(x) = \frac{R^2}{|x|^2} x \quad \mathit{und} \quad v(x) = |x|^{2-n} u(k(x)).$$

Zeigen Sie zunächst mit dem Hebbarkeitssatz (Satz 3.16), dass u genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn v eine Lösung von

$$\begin{cases} v & \in & C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R}) \\ -\Delta v & = & 0 \textit{ in } B_R \\ v & = & R^{2-n}\varphi \in C^0(\partial B_R) \textit{ auf } \partial B_R \end{cases} \tag{2}$$

ist. Wenden Sie danach die Lösungsformel für (2) (Theorem 3.13) an und finden Sie die Lösungsformel für (1).

b) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u & = & 0 \text{ in } \Omega, \\ u & = & 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$, falls

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

gilt.

Aufgabe 3 *(C^2-subharmonische Funktionen)* (2 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe C^2-Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $\phi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.

b) Zeigen Sie, dass $u(x) = \log|x| : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ für $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ subharmonisch ist.

Aufgabe 4 *(Innere Kugelbedingung)* (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^2-Rand. Zeigen Sie, dass Ω der *inneren Kugelbedingung* genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Hinweis: Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 nehmen wir an, dass der Tangentialraum an $\partial\Omega$ im Punkt x_0 durch $\mathbb{R}^{n1} \times \{0\}$ gegeben ist. Der Rand von Ω lässt sich dann in einer Umgebung U von x_0 als Graph einer C^2-Funktion $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{U} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, (x, 0) \in U\}$ darstellen:

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', f(x')) \,|\, x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \tilde{U}\}.$$

————

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 04.11.2024, 12:15 Uhr vor der Vorlesung.