Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 04.11.2024
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (C^2-*subharmonische Funktionen*) (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $\phi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.

b) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, u(x) := \log |x|$ für $n \geq 2$ subharmonisch ist.

Aufgabe 2 (C^0-*subharmonische Funktionen*) (4 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 4.12: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u_1, \dots, u_N$ auf Ω definierte C^0-subharmonische Funktionen. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$

eine C^0-subharmonische Funktion auf Ω.

Zeigen Sie außerdem, dass $\log_+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^0-subharmonische Funktion ist. Hierbei ist

$$\log_+ |x| := \begin{cases} \log |x|, & \text{falls } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Maximumprinzip*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\Delta u = u^3, \text{ in } \Omega, \quad u = 0, \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$ in Ω gilt.

Aufgabe 4 (*Gradientenabschätzung*) (4 Punkte)

Sei $f \in C^0(\overline{B_R})$ und $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ eine Lösung von

$$\Delta u = f \quad \text{in } B_R.$$

Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$|Du(0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\partial B_R} |u| + \frac{R}{2} \max_{B_R} |f|.$$

Hinweis: Definieren Sie in $B_R^+ := \{x = (x', x_n) \in B_R : x_n > 0\}$ die Funktion

$$v(x', x_n) := \frac{1}{2}(u(x', x_n) - u(x', -x_n)).$$

Betrachten Sie dann eine Funktion

$$w(x', x_n) \coloneqq A|x'|^2 + Bx_n + Cx_n^2.$$

Mit dem Vergleichsprinzip schätzen Sie v durch w mit geeignet gewählten Konstanten A, B und C und leiten eine Abschätzung von $v_{x_n}(0)$ her.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 11.11.2024, 12:15 Uhr vor der Vorlesung.