Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 11.11.2024
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*Maximumprinzip und Abschätzung*) (4 Punkte)

Sei $u \in C^3(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $-Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) = 0$ in Ω. Hierbei sei der Operator L gleichmäßig elliptisch und $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i,j = 1, 2 \cdots, n)$.

a) Setze $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$. Zeigen Sie $-Lv \leq 0$ in Ω für hinreichend große $\lambda > 0$.

b) Folgern Sie

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n, L)(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}).$$

Hierbei ist $C(n, L)$ eine Konstante, die nur von n und dem Operator L abhängt.

Aufgabe 2 (*Maximumprinzip ohne die Bedingung $c \leq 0$*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Es sei $u \in C^2(\Omega)$ eine Unterlösung eines linearen, strikt elliptischen Differentialoperators $L = \sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_i b_i\partial_i u + cu$ in Ω, das heißt

$$-Lu \leq 0 \text{ in } \Omega$$

mit $|a_{ij}|, |b_i|, |c| \leq \Lambda$. Zusätzlich existiere ein $v \in C^2(\Omega)$ mit $v > 0$ in Ω und

$$-Lv \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass $w := u/v$ kein positives Maximum in Ω annehmen kann, außer wenn w konstant ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt: $-\left(\sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}w + \sum_i (2a_{ij}v^{-1}\partial_j v + b_i)\partial_i w\right) \leq 0$ *in* $D := \{w > 0\}$.

Aufgabe 3 (*Die Wärmeleitungsgleichung*) (8 Punkte)

a) Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass für alle $\Lambda > 0$ auch

$$u_\Lambda(x, t) := u(\Lambda x, \Lambda^2 t)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ist. Folgern Sie, dass auch

$$v(x, t) := x \cdot Du(x, t) + 2tu_t(x, t)$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

b) Zeigen Sie, dass die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgeleichung, gegeben durch

$$\gamma(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

tatsächlich die Wärmeleitungsgleichung löst.

c) Sei $\alpha > 0$. Wir definieren

$$G_\alpha : \mathbb{R}^n \times \left(0, \frac{1}{4\alpha}\right) \to \mathbb{R},\ G_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-4\alpha t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\alpha |x|^2}{1-4\alpha t}}.$$

Zeigen Sie, dass G_α für $t \in (0, \frac{1}{4\alpha})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

d) Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,t) dx = 1.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 18.11.2024, 12:15 Uhr vor der Vorlesung.