Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 18.11.2024
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*Die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung*) (8 Punkte)

Sei $n = 1$, $v \in C^2(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u(x, t) \coloneqq v(\frac{x^2}{t})$.

(a) Zeigen Sie, dass $u_t = u_{xx}$ genau dann gilt, wenn

$$4zv''(z) + (2 + z)v'(z) = 0 \quad \text{für } z > 0. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die allgemaine Lösung von (1) die folgende Form hat:

$$v(z) = c_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + c_2.$$

Hierbei sind c_1 und c_2 Konstanten.

(c) Leiten Sie $v(\frac{x^2}{t})$ nach x ab und zeigen Sie, dass man für eine schlaue Wahl der Konstante c_1 die eindimensionale Fundamentallösung erhält.

(d) Sei $w \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ eine Lösung der Gleichung

$$w_t = \alpha w_{xx} + \beta w_x + \gamma w \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Hierbei sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ fixierte Konstanten. Finden Sie geeignete Konstanten $\lambda, a \in \mathbb{R}$, so dass $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, $u(x, t) \coloneqq e^{\lambda t/\alpha} e^{-ax} w(x, \frac{t}{\alpha})$ die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (*Periodische Fortsetzung*) (4 Punkte)

Gegeben sei eine stetige Funktion $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

$$u : [0, \infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto u(t, x)$$

mit der Regularität $u \in C^0([0, \infty) \times [0, \pi]) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, \pi])$ für das Problem

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u, & \text{in } (0, \infty) \times (0, \pi), \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Hinweis: Man setze das Anfangsdatum φ ungerade und 2π-periodisch als stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ fort und benutze den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Nun zeige man, dass für diese Lösung $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ für alle $t > 0$ gilt.

Aufgabe 3 (Energie-Methode, Eindeutigkeit) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$F(t) := \int_\Omega u(x, t)^2 dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass F in $(0, T)$ differenzierbar ist und $F'(t) \leq 0$ für alle $t \in (0, T)$ ist. Folgern Sie, dass $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}_T$, falls u zusätzlich

$$u = 0 \quad \text{in } \Omega \times \{0\}$$

erfüllt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 25.11.2024, 12:15 Uhr per Mail.