Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 2.12.2024
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*Unterlösung*) (4 Punkte)
Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie:

a) Ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte konvexe Funktion, dann ist $v := \phi \circ u$ eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung, *d.h.* $v_t - \Delta v \leq 0$ in Ω_T.

b) Ist zusätzlich $u \in C^{3,2}(\Omega_T)$, dann ist $w = |Du|^2 + u_t^2$ eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 2 (*Spiegelung*) (2 Punkte)
Sei $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt mit $\phi(0) = 0$. Finden Sie eine Darstellungsformel für die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, && \text{für } x > 0, t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), && \text{für } x > 0, \\ u(x,t) &= 0, && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis. Setzen Sie ϕ stetig auf $\mathbb{R}$ fort und benutzen Sie die Resultate aus Satz 6.6 und (6.6). Weiter zeigen Sie, dass die so gefundene Darstellung eine Lösung des Problems ist.

Aufgabe 3 (*Das Intergral*) (2 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{E(1)} \frac{|x|^2}{\rho^2} dx d\rho,$$

wobei $E(1) = E(0,0,1)$ der Wärmeball ist.

Aufgabe 4 (*Eindeutigkeit*) ($2 + 2 + 4$ Punkte)

a) (*Gronwall´sche Ungleichung*)
Sei $I = [a,b)$ ein Intervall, $\alpha, \beta \in C^0(I)$ und $w \in C^1(int(I)) \cap C^0(I)$ erfülle die Ungleichung

$$w'(t) \leq \beta(t)w(t) + \alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$ die Ungleichung

$$w(t) \leq w(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds)} + \int_a^t \alpha(r)e^{\int_r^t \beta(s)ds} dr$$

gilt. Insbesondere, $w(t) \leq 0$ für $t \in I$, falls $\alpha = 0$ und $w(a) = 0$.

b) Sei B die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und sei $f \in C^0([0,\infty))$. Betrachten Sie das Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)(u - \frac{|x|^2}{2n}) - 1, \text{ in } B \times [0,\infty), \\ u(\cdot,t)_{|\partial B} = \frac{1}{2n}, \forall t \geq 0 \\ u(\cdot,0) = \frac{1}{2n}, \\ u \in C^2(B \times (0,\infty)) \cap C^0(\overline{B \times (0,\infty)}). \end{cases}$$

Zeigen Sie,

b1) dass das Problem höchstens eine Lösung hat.

b2) dass die Lösung, sofern sie existiert, nicht-negativ ist und die Abschätzung

$$0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{2n} \exp\{\int_0^t f(s)ds\} + \frac{|x|^2}{2n} \tag{1}$$

erfüllt. Weiter gilt $u(x,t) \leq 1/n$, falls $f \leq 0$.

Hinweis. Benutzen Sie Aufgabe 3a) zweimal. Für die Eindeutigkeit betrachten Sie $w(t) = \int_B v^2(t,x)dx$, wobei $v = u_1 - u_2$ die Differenz zweier Lösungen ist. Für die Abschätzung (1) ist es hilfreich $u - \frac{|x|^2}{2n}$ zu betrachten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 02.12.2024, 12:15 Uhr per Mail.