Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 24, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 03.12.2024
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*Wärmeleitungsgl. mit gemischten Randbedingungen*) (8 Punkte)

a) (homogene Wärmeleitungsgleichung) Bitte lösen Sie das Problem:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad \text{in} \;\; (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u_x(0,t) &= 0, \quad \forall\, t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad \forall\, x \in (0,\infty), \end{aligned}$$

wobei $\varphi \in C_0^b((0,\infty)) \cap C^1([0,\infty))$ mit $\varphi(0) = 0$.
Hinweis: Vewenden Sie eine passende Spiegelung

b) (inhomogene Wärmeleitungsgleichung) Bitte lösen Sie das Problem:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad (in)(0,\infty)\times(0,\infty) \\ u_x(0,t) &= h(t), \quad \forall t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in (0,\infty) \end{aligned}$$

wobei $h \in C^1((0,\infty)) \cap C([0,\infty))$ und $\varphi \in C_0^b((0,\infty)) \cap C^1([0,\infty))$ mit $\varphi_x(0) = h(0)$.
Hinweis: Reduzieren Sie das Problem zuerst zu einem Problem mit inhomogener Wärmeleitungsgleichung. Dann benutzen Sie die Spiegelungsmethode.

Aufgabe 2 (*Das Maximumprinzip*) (4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Sei $u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) &= \varphi(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei $u \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Man zeige die folgenden Gleichheiten:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi, \qquad \inf_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Hinweis. Wählen Sie $M > 0$, sodass $\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n}(u+M) > 0$. Wenden Sie den Operator der Wärmeleitungsgleichung auf die Funktion $e^{-a(2nt+|x|^2)}(u+M)$ an und beweisen Sie:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} e^{-a(2nt+|x|^2)}(u+M) = \sup_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}(\varphi+M).$$

Man beachte hierbei, dass die Funktionen $e^{-a(2nt+|x|^2)}(u+M)$ ihr Maximum in $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ annehmen. Schließlich fixiere man $0<R<\infty$ und führe den Grenzübergang $a\to 0$ auf $[0,R)\times B_R(0)$ durch.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien ein beschränktes reguläres Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, der Raum-Zeit-Zylinder $\Omega_T=\Omega\times(0,T]$ und eine Lösung $u\in C^{1,2}(\Omega_T)$ des Problems:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, && \text{in } \Omega_T,\\ u &= 0, && \text{auf } (0,T]\times\partial\Omega_T, mit\\ u(0,x) &= \varphi(x), && x\in\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

u$_t\in C^{1,2}(\Omega_T)\cap C^0(\Omega_T)$ und $u_{t,x_i}(\cdot,t)\in C^0(\Omega)$. Man definiere die thermische Energie des Körpers Ω zur Zeit t:

$$E(t)=\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Beweisen Sie, dass für jedes $0\le t_1<t<t_2\le T$ gilt:

$$E(t)\le[E(t_1)]^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}}[E(t_2)]^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}.$$

Die Eigenschaft von (1) heißt die Log-Konvexität der Funktion E.

Hinweis: Studieren Sie $E'(t)$ und $E''(t)$ und zeigen Sie:

$$E''(t)=4\int_\Omega (u_t)^2\,dx.$$

Verwenden Sie die Höldersche Ungleichung, um zu zeigen:

$$(E'(t))^2\le E(t)E''(t).$$

Nehmen Sie zuerst $E(t)>0$ an; dann betrachten Sie $f(t):=\log E(t)$ und zeigen die Konvexität dieser Funktion f, d.h. $f''\ge 0$. Verwenden Sie schließlich die äquivalente Aussage der Konvexität:

$$f((1-\tau)t_1+\tau t)\le(1-\tau)f(t_1)+\tau f(t).$$

Betrachten Sie für den allgemeinen Fall $\log(E(t)+\varepsilon)$ für $\varepsilon>0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 09.12.2024, 12:15 Uhr per Mail an xuwen.zhang@math.uni-freiburg.de auf Englisch!