Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE | WS 24, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang | 16.12.2024
Ph.D. X. Zhang

Aufgabe 1 (Satz von Liouville-Typ) (4* Punkte)

Sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0))$ eine Lösung von

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0).$$

Weiter gilt

$$|u(x,t)| \le C(1 + |x| + \sqrt{|t|})^m, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

für ein $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sie zeigen, dass u eine Polynom der Grad $\le m$ bzgl. $x = (x_1, \cdots, x_n), t$.

Als Folgerung, zeigen Sie eine Verstäkng vom Satz von Liouville:

Sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

d.h. u harmonisch in $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter gilt

$$|u(x)| \le C(1 + |x|)^m, \quad \forall (x) \in \mathbb{R}^n,$$

für ein $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sie zeigen, dass u eine Polynom der Grad $\le m$ bzgl. $x = (x_1, \cdots, x_n)$. (Satz von Liouville: Fall $m = 0$.)

Aufgabe 2 (*D'Alembertsche Formel*) (4* Punkte)

Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Sie betrachten das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(\cdot, 0) &= \varphi, \\ u_t(\cdot,) &= \psi, \end{cases}$$

mit der Transformation $(t, x) \mapsto (\xi, \eta)$ mit $\xi = x + t$ und $\eta = x - t$. Sie leiter eine partielle Differetianlgleichung für $v(\xi, \eta) := u(t, x)$ her und lösen die partielle Differetianlgleichung. Schließlich bekommen Sie die D'Alembertsche Formel für u.

Aufgabe 3 (*das Coursat-Problem*) (4* Punkte)

Seien ϕ_1 und ϕ_2 C^2 in $\{x > 0\}$. Sie lösen das Coursat Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \text{für } 0 < t < x, \\ u(x,0) &= \varphi_1(x), & \text{für } x > 0, \\ u(x,x) &= \varphi_2(x), & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Weiter bestimmen Sie den Bestimmtheitsbereich für jeden Punkt (x,t) mit $0 < t < x$.

Aufgabe 4 (*Kompatibilitätsbedingungen und periodische Lösung*) (4* Punkte)

Sei im Folgenden $L > 0$ fest. Gegeben seien geeignete Funktionen $\phi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^2([0, L] \times \mathbb{R})$ als Lösung des Cauchyproblems für die homogene Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx} &= 0, && \text{für } (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in [0,L], \\ u_t(x,0) &= \psi, && \text{für } x \in [0,L], \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, && \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Zunächst finden Sie die Kompatibilitätsbedingungen für (1). Dann nehmen Sie die Kompatibilitätsbedingungen an und lösen Sie das Probelm (1).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Mi., 08.01.2025, 12:15 Uhr

Frohe Weihnachten und guten rutsch ins neue Jahr 2025!