Übungsaufgaben zur Vorlesung
DG II — SS2025, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 30.6.25
Dr. X. Zhang

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a minimal graph, i.e, it is a graph of a function $u : \Omega \to \mathbb{R}$, which satisfies the minimal surface equation, i.e,

$$\operatorname{div}\left\{\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right\} = 0.$$

Let N be the normal vector and define

$$u = \langle N, (0,0,1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Then u is a Jacobi field, i.e, u satisfies $Lu = 0$, where $L = \Delta_\Sigma + |A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N)$ is the stability operator. Please prove this by a direct computation.

Aufgabe 2 (4 + 4 Punkte)

The catenoid

$$\Sigma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = \cosh^2(x_3)\}$$

is a minimal surface as proved in Blatt 07.
Compute it Gauss curvature and its finite total curvature, i.e.,

$$\int_\Sigma |K|.$$

And also prove by direct computation that K satisfies Simons' equation

$$\Delta_\Sigma K = -2K + 4|\nabla\sqrt{-K}|^2$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Suppose that $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ is a minimal surface. What is the curvature of the conformal metric $|A|^2\langle\cdot,\cdot\rangle$? (Assume that $|A| \neq 0$.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 7.7.25, vor der Vorlesung**.