M A T H E M A T I K II

2025

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

23. April 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare Algebra

1 Vektorräume

Ein Vektorraum (genauer $\mathbb{R}$-Vektorraum) ist eine Menge V, auf der eine Addition und eine Skalarmultiplikation gegeben sind:

$$\begin{array}{lll} V \times V \to V & (v, w) \mapsto v + w & \text{(Vektoraddition)} \\ \mathbb{R} \times V \to V & (\lambda, v) \mapsto \lambda v & \text{(Skalarmultiplikation)} \end{array}$$

Die Elemente von V heißen Vektoren, die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen Skalare (oder einfach Zahlen). Statt $\mathbb{R}$ könnte man auch die komplexen Zahlen nehmen, man spricht dann von einem $\mathbb{C}$-Vektorraum; der Einfachheit halber machen wir es aber erst einmal mit reellen Zahlen. Es werden folgende Rechenregeln verlangt:

$(V, +)$ ist eine additive Gruppe:

$$\begin{array}{llcll} \text{Assoziativgesetz} & (u + v) + w & = & u + (v + w) & \\ \text{Kommutativgesetz} & v + w & = & w + v & \\ \text{Existenz des Nullvektors} & v + 0 & = & v & \text{für } v \in V \\ \text{Existenz des inversen Elements} & v + (-v) & = & 0 & \text{für } v \in V. \end{array}$$

Operation von $\mathbb{R}$ auf V (für $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lrcl} \text{Assoziativgesetz} & \lambda(\mu v) & = & (\lambda\mu)v \\ \text{Operation der 1} & 1 \cdot v & = & v \\ \text{Distributivgesetz 1} & \lambda(v + w) & = & \lambda v + \lambda w \\ \text{Distributivgesetz 2} & (\lambda + \mu)v & = & \lambda v + \mu v. \end{array}$$

Aus dieser Liste lassen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten. Zum Beispiel folgt, dass es nur einen Nullvektor in V gibt: für zwei Nullvektoren $0_{1,2}$ gilt nämlich

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Analog gibt es zu $v \in V$ auch nur ein Inverses, denn aus $v + w_{1,2} = 0$ folgt

$$w_2 = (v + w_1) + w_2 = w_1 + (v + w_2) = w_1.$$

Darum können wir das Inverse auch mit $-v$ bezeichnen. Das zentrale Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums ist natürlich der $\mathbb{R}^n$, wobei die Addition und Skalarmultiplikation komponenetenweise definiert sind.

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ein zweites wichtiges Beispiel ist der Vektorraum $\mathcal{F}(M)$ aller Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, dabei ist M irgendeine Menge. Die Addition und Skalarmultiplikation sind punktweise definiert:

$$\begin{aligned} f + g \in \mathcal{F}(M) \quad (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \lambda f \in \mathcal{F}(M) \quad (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Der Nullvektor ist die Nullfunktion, also $f(x) = 0$ für alle $x \in M$. Das zu f inverse Element ist die Funktion $-f$, also $(-f)(x) = -f(x)$. Es ist etwas gewöhnungsbedürftig hier von Vektoren zu sprechen, aber letztlich kommt es eben nur auf die oben definierten Rechenregeln an, und die kann man hier leicht verifizieren (Übungsaufgabe).

Sei X eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ die den Nullpunkt enthält. Für $x, y \in X$ ist dann $x + y$ wieder in X, und für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch λx in X. Eine entsprechende Aussage gilt auch für eine Ebene durch den Nullpunkt. Allgemein führt das auf das Konzept des Unterraums.

Definition 1.1 (Untervektorraum) *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Menge $X \subset V$ heißt Untervektorraum, wenn $0 \in X$ und wenn folgende Regeln gelten:*

$$\begin{aligned} x, y \in X \quad &\Rightarrow \quad x + y \in X \\ x \in X, \lambda \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad \lambda x \in X. \end{aligned}$$

Bemerkung. *X ist dann selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit den Operationen $+$ und $\cdot$ von V.*

Beispiel 1.1 Sei X die Menge aller Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung [1]

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Der Nullvektor $0 = (0, 0, 0)$ gehört dazu, und mit x, y sind auch $x + y$ und λx Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) &= x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 + 2y_2 - y_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 2\lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) = 0. \end{aligned}$$

Also ist X ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Dagegen ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

kein Untervektorraum. Das ergibt sich schon daraus, dass der Nullvektor nicht dazugehört. Auch lösen $x + y$ sowie λx (außer für $\lambda = 1$) nicht die Gleichung.

[1] *Zur Notation:* aus Platzgründen schreiben wir Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ im Text als Zeilen, in eingerückten Formeln dagegen als Spalten. Es sollte keine Missverständnisse geben.

Beispiel 1.2 Für jedes $v \in V$ ist die Menge $\mathbb{R} \cdot v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum. Im Fall $v \neq 0$ ist $\mathbb{R} \cdot v$ die durch v aufgespannte Gerade durch den Nullpunkt. Im Fall $v = 0$ ist $\mathbb{R} \cdot v = \{0\}$, auch das ist ein Untervektorraum.

Beispiel 1.3 (Die Räume $C^k(I)$) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist der Raum der stetigen Funktionen $C^0(I)$ ein Untervektorraum des Raums $\mathcal{F}(I)$ aller Funktionen auf I. Denn die Nullfunktion ist stetig, und bekanntlich gilt

$$\begin{aligned} f, g \text{ stetig auf } I \quad &\Rightarrow \quad f + g \text{ stetig auf } I \\ \lambda \in \mathbb{R},\, f \text{ stetig auf } I \quad &\Rightarrow \quad \lambda f \text{ stetig auf } I. \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Analysis ist die Summe von differenzierbaren Funktionen wieder differenzierbar mit $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, ebenso $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$. Es folgt, dass auch der Raum $C^1(I)$ der stetig differenzierbaren Funktionen ein Unterraum ist, sowie allgemeiner $C^k(I)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $C^\infty(I)$. Wir haben also eine Sequenz von Unterräumen

$$C^\infty(I) \subset \ldots \subset C^k(I) \subset \ldots \subset C^1(I) \subset C^0(I) \subset \mathcal{F}(I).$$

Beispiel 1.4 (Lösungsraum einer linearen Differentialgleichung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und es seien $a_0, a_1 \in C^0(I)$ gegeben. Betrachte

$$X = \{f \in C^2(I) : f''(t) + a_1(t) f'(t) + a_0(t) f(t) = 0 \text{ für alle } t \in I\}.$$

Lösen f und g die Differentialgleichung, so auch $f + g$ und λf. Daher ist X ein Untervektorraum von $C^2(I)$.

Beispiel 1.5 (Durchschnitt von Unterräumen) Seien X_i, $i \in I$, Unterräume des Vektorraums V. Dann ist der Durchschnitt der X_i, also

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in V : x \in X_i \text{ für alle } i \in I\} \subset V$$

wieder ein Unterraum von V. Denn es ist $0 \in X_i$ für alle $i \in I$, und mit $x, y \in X_i$ für alle $i \in I$ folgt auch $x + y \in X_i$ sowie $\lambda x \in X_i$ für alle $i \in I$.

Im Gegensatz zum Durchschnitt $X \cap Y$ ist die Vereinigung $X \cup Y$ von zwei Unterräumen im allgemeinen kein Unterraum. Das sieht man schon bei zwei Geraden oder zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Daher folgender Begriff.

Satz 1.1 (Summe von Unterräumen) *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $X, Y \subset V$ seien Unterräume. Dann ist*

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\, y \in Y\}$$

wieder ein Unterraum von V.

BEWEIS: X und Y enthalten beide den Nullvektor, also auch $X + Y$. Sind $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2 \in X + Y$, so folgt

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in X + Y, \\ \lambda z_1 &= \lambda x_1 + \lambda y_1 \in X + Y. \end{aligned}$$

□

Man kann auch sagen, $X + Y$ ist der kleinste Unterraum der X und Y enthält. Denn enthält ein Unterraum X und Y, so auch alle Elemente der Form $x + y$ und damit den Raum $X + Y$.

Definition 1.2 (direkte Summe) *Zwei Unterräume $X, Y \subset V$ heißen komplementär, bzw. V heißt direkte Summe von X und Y* (Notation: $V = X \oplus Y$), *wenn gilt:*

$$X + Y = V \quad \text{und} \quad X \cap Y = \{0\}.$$

Beispiel 1.6 Betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Geraden

$$X = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } b \neq 0.$$

Wir behaupten $\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$. Ist $v \in X \cap Y$ so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \overset{b \neq 0}{\Rightarrow} \quad \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Das zeigt $X \cap Y = \{0\}$. Sei nun $v \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Wir suchen λ, μ mit

$$v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} v_1 & = & \lambda + \mu a \\ v_2 & = & \mu b. \end{array}$$

Das gilt mit $\mu = \frac{1}{b} v_2$ und $\lambda = v_1 - \mu a = v_1 - \frac{a}{b} v_2$. Somit gilt $\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$.

Definition 1.3 (erzeugter Unterraum) *Sei M eine nichtleere Menge von Vektoren in einem Vektorraum V. Der von M erzeugte Unterraum oder Span von M (Notation:* $\operatorname{Span} M$*) ist die Menge aller $x \in V$ der Form*

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \quad \text{wobei } k \in \mathbb{N},\ x_i \in M,\ \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Eine (endliche) Summe wie in (1.1) heißt Linearkombination von $x_1, \ldots, x_k$.

Wir wollen checken dass $\operatorname{Span} M$ ein Unterraum ist. Nach Annahme gibt es ja wenigstens ein $x \in M$, also kriegen wir den Nullvektor mit $0 = 0 \cdot x \in \operatorname{Span} M$. Seien $x, y \in \operatorname{Span} M$. Wir können annehmen, dass x, y Linearkombinationen derselben Menge $x_1, \ldots, x_k$ in M sind, sonst vereinigen wir die beiden Mengen und setzen die zusätzlichen Koeffizienten einfach gleich Null. Sei also $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ und $y = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k$. Dann folgt

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k) x_k \in \operatorname{Span} M, \\ \alpha x & = & (\alpha \lambda_1) x_1 + \ldots + (\alpha \lambda_k) x_k \in \operatorname{Span} M. \end{array}$$

Damit sind die Unterraumkriterien gezeigt. Enthält ein Unterraum $X \subset V$ die Menge M, so enthält er natürlich auch alle Linearkombinationen wie oben und damit schon ganz $\operatorname{Span} M$. Somit ist $\operatorname{Span} M$ der Durchschnitt aller Unterräume, die M enthalten. Dies ist eine hübsche Charakterisierung, aber die obige Definition ist doch konkreter. Im Fall $M = \emptyset$ ergibt sich aus der Sache mit dem Durchschnitt jedenfalls die sinnvolle Definition $\operatorname{Span} \emptyset = \{0\}$.

Definition 1.4 (endlichdimensional) *Ein Vektorraum V heißt endlichdimensional, wenn es eine endliche Menge $M \subset V$ gibt mit $V = \operatorname{Span} M$, andernfalls unendlichdimensional.*

Beispiel 1.7 (Polynomraum) Eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$, wenn sie eine Darstellung hat der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Wir brauchen als Hilfsmittel das Abspalten von Nullstellen: ist $P(x_0) = 0$ so gibt es ein Polynom $Q(x)$ vom Grad $n-1$ mit $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Insbesondere hat $P(x)$ höchsten n Nullstellen. Daraus folgt: der Grad und die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ sind eindeutig bestimmt. Denn gäbe es eine andere Darstellung, ggf. mit anderem Grad m, so folgt durch Abziehen eine Darstellung der Nullfunktion als Polynom vom Grad höchstens $\max(m, n)$. Aber diese hat dann nicht mehr als $\max(m, n)$ Nullstellen, Widerspruch.

Die Menge der Polynome vom Grad n bildet keinen Unterraum des Raums aller Funktionen auf $\mathbb{R}$, denn bei Addition $P + Q$ können sich die Terme mit Potenz n wegheben und damit der Grad von $P + Q$ kleiner als n sein. Aber die Menge $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ aller Polynome vom Grad höchstens n ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Sind P, Q Polynome vom Grad höchstens n mit Koeffizienten a_i, b_i, so sind $P + Q$ und λP ebenfalls Polynome vom Grad höchstens n, mit Koeffizienten $a_i + b_i$ bzw. λa_i. Jedes Element von $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ist Linearkombination der Monome $1, x, \ldots, x^n$, das heißt $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ist Span der Menge $\{x^i : 0 \leq i \leq n\}$ und damit endlichdimensional. Der Raum aller reellen Polynome

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$$

ist ebenfalls ein Unterraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Denn die Summe von zwei Polynomen vom Grad höchstens m bzw. n ist ja ein Polynom vom Grad höchstens $\max(m, n)$. Der Raum $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist jedoch nicht endlichdimensional: angenommen er wäre Span von Polynomen $P_1(x), \ldots, P_N(x)$ vom Grad $n_1, \ldots, n_N$. Ist $n > \max_{i=1,\ldots,N} n_i$ so ist $P(x) = x^n$ aber nicht als Linearkombination der P_i darstellbar. Denn sonst gibt es $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$x^n - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die linke Seite hat Grad n, kann also maximal n Nullstellen haben, Widerspruch.

Definition 1.5 (lineare Abhängigkeit) *Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ heißen linear abhängig, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle Null sind und so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0.$$

Andernfalls heißen $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

Bemerkung. Oft geht es darum nachzuweisen dass gegebene Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind. Dazu muss folgende Implikation gezeigt werden:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Beispiel 1.8 Sind die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dazu ist zu klären, ob die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ von Null verschiedene Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat. Ausgeschrieben lautet die Gleichung

$$\begin{array}{cccll} \lambda_1 & & +\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Das System hat die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, -1)$, also gilt $v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Die Vektoren sind somit linear abhängig.

Unser nächstes Ziel ist die Definition der Dimension eines Vektorraums. Anschaulich ist das klar, eine Gerade hat Dimension 1, eine Ebene Dimension 2 und so weiter. Eine allgemeine Definition ist aber gar nicht so einfach, wir brauchen den Austauschsatz von Steinitz [2]. Das ist ein mathematisches Argument, man kann sich drüber unterhalten ob Sie das kennen müssen. Aber jedenfalls ist der Begriff der Dimension fundamental in der Linearen Algebra, den müssen Sie verstehen.

Satz 1.2 (Austauschsatz) *V sei durch $v_1, \ldots v_m$ erzeugt, und $x_1, \ldots, x_k \in V$ seien linear unabhängig. Dann gibt es $j_1, \ldots, j_k$ verschieden, so dass V auch erzeugt wird wenn wir $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ durch $x_1, \ldots, x_k$ ersetzen. Insbesondere gilt $k \leq m$.*

Beweis: Induktion über k. Im Fall $k = 0$ ist nichts zu tun. Seien nun $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{k-1}}$ schon ersetzt durch $x_1, \ldots, x_{k-1}$, so dass V erzeugt wird. Der Vektor x_k hat dann eine Darstellung

$$x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + \sum_{j \neq j_1, \ldots, j_{k-1}} \lambda_j v_j.$$

Die λ_j sind nicht alle Null, denn sonst wären $x_1, \ldots, x_k$ linear abhängig. Wähle also ein $j_k \neq j_1, \ldots, j_{k-1}$ mit $\lambda_{j_k} \neq 0$, es folgt durch Auflösen

$$v_{j_k} = \frac{1}{\lambda_{j_k}} \Big(x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i - \sum_{j \neq j_1, \ldots, j_k} \lambda_j v_j \Big). \tag{1.2}$$

Wir behaupten dass V durch $x_1, \ldots, x_k$ und die v_j mit $j \neq j_1, \ldots, j_k$ aufgespannt wird. Schreibe dazu $v \in V$ als Linearkombinmation von $x_1, \ldots, x_{k-1}$ und v_j mit $j \neq j_1, \ldots, j_{k-1}$, das geht ja nach Induktionsannahme. Falls v_{j_k} in der Darstellung vorkommt, ersetze es durch die rechte Seite von (1.2). Damit ist der Satz gezeigt. $\square$

Wir können nun ein sehr wichtiges Konzept einführen.

Definition 1.6 (Basis) *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Eine nummerierte Menge $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt Basis von V, wenn gilt*

[2] Ernst Steinitz, 1871-1928

(1) $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$

(2) $v_1, \ldots, v_n$ *sind linear unabhängig.*

Bemerkung. *Die Eigenschaften* (1) *und* (2) *bleiben bei Umordnung erhalten, also ist eine Permutation* $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ *einer Basis wieder eine Basis, allerdings nicht dieselbe da es auf die Reihenfolge ankommt.*

Satz 1.3 (Existenz einer Basis und Dimension) *Jeder endlichdimensionale Vektorraum* V *hat eine Basis, und je zwei Basen von* V *haben gleich viele Elemente. Diese Anzahl nennen wir die Dimension* $\dim V$ *von* V*.*

Beweis: Da V endlichdimensional ist, gibt es eine endliche Menge die V erzeugt, also $V = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Austauschsatz hat jede linear unabhängige Menge in V höchstens m Elemente. Seien $x_1, \ldots, x_k$ maximal viele linear unabhängige Vektoren, also $k \leq m$. Wir zeigen dass $x_1, \ldots, x_k$ eine Basis ist. Für jedes $v \in V$ ist $v, x_1, \ldots, x_k$ linear abhängig, das heißt es gibt $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nicht alle Null mit

$$\lambda v + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0.$$

Es muss $\lambda \neq 0$ sein, sonst wären $x_1, \ldots, x_k$ linear abhängig. Durch Auflösen folgt

$$v = -\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) \in \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Also $V = \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_k\}$, und $x_1, \ldots, x_k$ ist eine Basis. Sei nun $v_1, \ldots, v_\ell$ auch eine Basis. Nach Austauschsatz ist $k \leq \ell$, siehe oben, andererseits wegen Maximalität $k \geq \ell$, also $k = \ell$.

□

Beispiel 1.9 Im $\mathbb{R}^n$ haben wir die Standardbasis

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Dabei steht die 1 an der i-ten Stelle. Es ist klar dass $\mathbb{R}^n = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, denn

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

Andererseits sind die $e_1, \ldots, e_n$ linear unabhängig, denn

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Die Dimension von $\mathbb{R}^n$ ist somit gleich n, wie es sein sollte.

Beispiel 1.10 Sei $X = \{x = (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Wir behaupten, dass folgende Vektoren eine Basis von X bilden:

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zunächst gilt $v, w \in X$, und die Vektoren sind linear unabhängig:

$$0 = \lambda v + \mu w = \begin{pmatrix} -\lambda - \mu \\ 3\lambda \\ 3\mu \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0.$$

Weiter gilt für $x \in X$ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda = \frac{x_2}{3} \text{ und } \mu = \frac{x_3}{3}.$$

Beachte dabei $x_1 = -(x_2 + x_3)/3$ wegen $x \in X$. Also ist v, w eine Basis.

Beispiel 1.11 Die Monome $P_i(x) = x^i$, $i = 0, \ldots, n$, sind Basis des Raums $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens n. Denn zu $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ gibt es $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem sind die Monome linear unabhängig, denn sei

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann verschwinden alle Koeffizienten, sonst hätte das Polynom höchstens n Nullstellen.

Auch unendlichdimensionale Vektorräume haben eine Basis. Das wird in der Mathematik Grundvorlesung bewiesen, es sollte aber meiner Meinung nach nicht überbewertet werden. Zum einen verwendet der Beweis ein nicht-konstruktives Argument, das Zornsche Lemma. Zum andern spielt die Existenz einer solchen Basis eine untergeordnete Rolle, zum Beispiel braucht man in der Fourieranalysis und allgemeiner in der Funktionalanalysis ein anderes Konzept von Basis.

Satz 1.4 (Dimension einer Summe) *Für endlichdimensionale Unterräume X, Y eines Vektorraums V gilt die Formel*

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Beweis: Seien $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_n$ Basen von X bzw. Y. Wähle weiter eine Basis $v_1, \ldots, v_k$ von $X \cap Y$. Nach dem Austauschsatz, Satz 1.2, können wir annehmen dass

$$x_i = y_i = v_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Wir zeigen, dass $v_1, \ldots, v_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, y_{k+1}, \ldots, y_n$ eine Basis von $X + Y$ ist. Daraus folgt

$$\dim(X + Y) = k + (m - k) + (n - k) = m + n - k = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Es ist klar, dass die Vektoren $X + Y$ aufspannen, zu zeigen ist die Unabhängigkeit. Sei

$$v + x + y = 0 \qquad \text{wobei } v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i,\ x = \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j x_j,\ y = \sum_{\ell=k+1}^{n} \mu_\ell y_\ell.$$

Es folgt $x = -v - y \in Y$, also ist $x \in X \cap Y$. Es gibt dann $\beta_1, \dots, \beta_k$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = x = \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j x_j.$$

Da $v_1, \dots, v_k, x_{k+1}, \dots, x_m$ Basis von X ist, folgt $\lambda_j = 0$ (und $\beta_i = 0$). Analog sehen wir $\mu_\ell = 0$ und schließlich $\alpha_i = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit bewiesen. $\square$