Aufgabe 1 *(Ableitungen)*
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen, mit Angabe des Gültigkeitsbereichs (Begründungen):

(a) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$.

Aufgabe 2 *(Ableitung von bilinearen Termen)*
Die Abbildung $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $(u, v) \mapsto B(u, v)$, sei bilinear, also linear in u und in v. Zeigen Sie für differenzierbare $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ die Produktregel

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Schreiben Sie die Regel auf in den Spezialfällen

$$\begin{array}{lcll} B(u,v) & = & \langle u, v\rangle & \text{(Standardskalarprodukt im } \mathbb{R}^n\text{)},\\ B(u,v) & = & uv & \text{(komplexe Multiplikation auf } \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}\text{)},\\ B(u,v) & = & u \times v & \text{(Kreuzprodukt in } \mathbb{R}^3\text{)}\\ B(u,v) & = & uv & \text{(Matrixprodukt von } u \in \mathbb{R}^{k\times m}, v \in \mathbb{R}^{m\times n}\text{)}. \end{array}$$

Aufgabe 3 (*Optimal Runner*)
Scrat $(-a, b_1)$ will so schnell wie möglich zu seiner kostbaren Eichel (a, b_2), wobei $a, b_1, b_2 > 0$. Zwischendurch muss er irgendwo an der unendlich langen Theke, der x-Achse, ein Glühwein holen. Die Strecke ist also

$$L(x) = \sqrt{(x+a)^2 + b_1^2} + \sqrt{(x-a)^2 + b_2^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es einen optimalen Punkt gibt und berechnen Sie diesen.

(b) Variante: er muss 10 Glühwein abholen, darum hat er auf den beiden Teilstrecken verschiedene Geschwindigkeiten $v_1 > v_2$.

Aufgabe 4 *(Hebbarer Punkt für f')*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ stetig und auf $I\backslash\{x_0\}$ differenzierbar mit $\lim_{x\to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie $f'(x_0) = a$.

Abgabe bis Donnerstag 8.1.2026 um 11:00

In diesem Blatt sollen die Grenzwerte vopn rationalen Funktionen, also Quotienten von Polynomen, studiert werden. Dazu müssen erst Grundtatsachen zu Polynomen erarbeitet werden.

Definition Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt (reelles) Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$, wenn es $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Aus der Definition ist nicht sofort klar, daß der Grad n und die Koeffizienten a_i eindeutig bestimmt sind. Dies wird weiter unten gezeigt.

Lemma (*Abspaltung von Linearfaktoren*)
Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynom vom Grad n mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Ist $p(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so gibt es ein Polynom $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $n-1$ mit Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1}$ wobei $b_{n-1} = a_n$, so dass gilt:

$$p(x) = (x - \lambda)\, q(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Anleitung: Wegen $p(\lambda) = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (der Summand a_0 hebt sich weg)

$$p(x) = p(x) - p(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - \lambda^k).$$

Zeigen Sie mit der geometrischen Summe, dass sich aus $x^k - \lambda^k$ ein Faktor $x - \lambda$ ausklammern lässt.

Folgerung Ein Polynom p vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Anleitung: Durch Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$.

Folgerung (*Koeffizientenvergleich*)
Seien $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome vom Grad m bzw. n, das heißt es gilt mit $a_m, b_n \neq 0$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \text{ und } q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ist $p(x) = q(x)$ an mehr als $\max(m, n)$ Stellen, so folgt $n = m$ und $b_i = a_i$ für $i = 0, 1, \ldots, m$.

Anleitung: Betrachten Sie $p - q$.

Satz Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad n hat eine eindeutige Zerlegung

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{\nu_r}\, q(z) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Dabei sind $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \subset \mathbb{R}$ die Nullstellen von p in $\mathbb{R}$ (eventuell $r = 0$), und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom vom Grad $n - (\nu_1 + \ldots + \nu_r) \in \{0, \ldots, n\}$ mit $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Zahlen $\nu_i \geq 1$ heißen Vielfachheiten der Nullstellen λ_i.

Anleitung. Die Existenz der Zerlegung folgt durch wiederholte Abspaltung von Linearfaktoren bei den Nullstellen. Für die Eindeutigkeit überlegen Sie zuerst dass die Potenz ν_1 (und analog die anderen ν_i) eindeutig sind.

Seien jetzt $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ reelle Polynome mit $a_m, b_n \neq 0$. Setze $N = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$ und definiere

$$f : \mathbb{R} \backslash N \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

(a) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ in den Nullstellen $x_0 \in N$.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.

Abgabe optional