

Aufgabe 1 (*exponentielles Wachstum*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) differenzierbar, $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f' \geq \lambda f \text{ auf } (a, b) &\Rightarrow e^{-\lambda x_2} f(x_2) \geq e^{-\lambda x_1} f(x_1) \\ f' \leq \lambda f \text{ auf } (a, b) &\Rightarrow e^{-\lambda x_2} f(x_2) \leq e^{-\lambda x_1} f(x_1). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*Potenzgesetze*)

Zeigen Sie für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y & (a^x)^y &= a^{xy}, \\ \left(\frac{1}{a}\right)^x &= a^{-x} & a^x b^x &= (ab)^x, \\ \frac{d}{dx} a^x &= \log(a) a^x & \frac{d}{da} a^x &= x a^{x-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*Kreisbewegung*)

Sei I ein Intervall, $t_0 \in I$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: die eindeutige Lösung von

$$c'(t) = i\omega c(t) \text{ für } t \in I, \quad c(t_0) = z_0,$$

ist die Funktion $c(t) = z_0 e^{i\omega(t-t_0)}$, $t \in I$.

Aufgabe 4 (*Kreditberechnung II*)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem $S'(t) = pS(t) - B$, $S(0) = S_0$.

(a) Zeigen Sie: die Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-pt} \left(S(t) - \frac{B}{p} \right) \right) = 0,$$

und folgern Sie durch Einsetzen von $t = 0$

$$S(t) = \frac{B}{p} + \left(S_0 - \frac{B}{p} \right) e^{pt}.$$

(b) Sei $pS_0 < B$ (Motivation: $S'(0) < 0$). Zeigen Sie für die Laufzeit T

$$T = -\frac{1}{p} \log \left(1 - \frac{pS_0}{B} \right) \quad (\text{wobei } S(T) = 0).$$

- (c) Die Kosten des Kredits sind $K = BT - S_0$. Rechnen Sie für $p = 0,04$, $S_0 = 200.000$ und $B = 12.000$ sowie $B = 24.000$.

Aufgabe 5*(eine C^∞ -Funktion) (zusätzliche 3 Punkte)

Zeigen Sie dass folgende Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ ist:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Anleitung. Zeigen Sie durch Induktion, dass es Polynome $p_n(x)$ gibt mit

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Abgabe bis Donnerstag 22.1.2026 um 11:00