
Aufgabe 1 *(Cotangens)*
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\cot : \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \cot t = \frac{\cos t}{\sin t},$$

die Periode π hat und das Intervall $(0, \pi)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. Begründen Sie, dass die Umkehrfunktion arccot (*arcus cotangens*) differenzierbar ist mit

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 2 *(Polardarstellung)*
Rechnen Sie für $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Gleichung $z = re^{i\vartheta}$ nach, wobei

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

Schreiben Sie als $re^{i\vartheta}$: -3, $4i$, $-5i$, $-e^{2i}$, $ie^{it} (t \in \mathbb{R})$, $1+i$, $-1-i$, $(1+i)^{2026}$.

Aufgabe 3 *(zur Eulerschen Formel)*
Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kt \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kt \quad (t \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 4 *(Anfangswertproblem)*
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$c'(t) = Ac(t), \quad c(0) = z_0 \quad \text{für die gesuchte Funktion } c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass im Fall $z_0 = 0$ die Nullfunktion die einzige Lösung ist (*Hinweis:* berechnen Sie $\frac{d}{dt}|c(t)|^2$ und verwenden Sie Aufgabe 1, Blatt 12).

(b) Folgern Sie aus (a), dass es für jedes z_0 höchstens eine Lösung gibt.

(c) Bestimmen Sie die Lösung im Fall

$$A = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Abgabe bis Donnerstag 29.1.2026 um 11:00