

Aufgabe 1 (*Exponentialabbildung für Matrizen*)

Es bezeichne $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$ die Euklidische Norm der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b) Die Reihe $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ist für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konvergent.

(c) Die Funktion $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(t) = \exp(tA)$, ist (die) Lösung von

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = E_n.$$

(d) Folgern Sie: ist $[A, B] = AB - BA = 0$, so gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

Aufgabe 2 (*punktweise/gleichmäßige Konvergenz*)

Konvergiert die Folge $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise bzw. gleichmäßig?

(a) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$.

(b) $f_n(x) = x - n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

Aufgabe 3 (*Berechnung des Integrals mit Riemannschem Summen*)

Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \dots, N$.

Aufgabe 4 (*Integral als Funktion der oberen Grenze*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, insbesondere beschränkt. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(\xi) \, d\xi$, Lipschitzstetig ist.

Aufgabe 5 (*Integralnorm*)

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass durch

$$\|\cdot\|_1 : C^0(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

eine Norm definiert ist (also Positivität, Halblinearität und Dreiecksungleichung).
Ist $\|\cdot\|_1$ auch eine Norm auf dem Raum $\mathcal{R}(I)$?

keine Abgabe