BRÜCKENKURS LINEARE ALGEBRA
An Studierende in Analysis II, die noch nicht Lineare Algebra I gehört haben (Variante 3 im 2HF-Bachelor): im SS 2026 wird ein Brückenkurs Lineare Algebra angeboten. Dieser besteht aus einem Skript zum Selbststudium und einem begleitenden Tutorat. Es geht nur um Grundkenntnisse, damit die Analysis II machbar ist, der Kurs ersetzt nicht die Vorlesungen zur Linearen Algebra.
Dei Interesse Belegung in HISinOne bis spätestens 14. April. (07LE23T-0-BrückeLA)

Aufgabe 1 *(Flächeninhalt der Ellipse)*
Berechnen Sie den von einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ eingeschlossenen Flächeninhalt, also den Flächeninhalt der Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 *(Substitutionsregel)*
Berechnen Sie dir folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t}$ (Substitution $x = \tan \frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\, dx$ $(a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx.$

Aufgabe 3 *(Substitutionsregel)*
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

mit einer Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $D = p^2 - 4q$.

Aufgabe 4 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Sei $f \in C^0(I)$ mit I offenes Intervall. Wir betrachten die Funktion

$$\Phi : I \to \mathbb{R},\ \Phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\, dx,$$

wobei $a : I^* \to I$ und $b : I^* \to I$ differenzierbar sind. Begründen Sie die Differenzierbarkeit von Φ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 5 *(Partielle Integration)*
Für $u, v \in C^0([-\pi, \pi]$ definieren wir $\langle u, v\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} uv \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist (siehe Lemma 5.3). Berechnen Sie weiter die Skalarprodukte $\langle u_k, u_l\rangle$, $\langle v_k, v_l\rangle$ sowie $\langle u_k, v_l\rangle \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ für

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos kx \qquad \text{und} \qquad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 6 *(zur Deltafunktion)*
Sei $g \in C^0(\mathbb{R})$ mit $g(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ und $\int_{\mathbb{R}} g = 1$. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$\delta_\varepsilon : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \delta_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, f(x)\, dx, \qquad \text{wobei } g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, g(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Zeigen Sie $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta_\varepsilon(f) = f(0)$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$. Gibt es $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}} g_0(x)\, f(x)\, dx = f(0)$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$?

keine Abgabe