Übungsaufgaben zur Analysis I WS 25/26, Serie 2
Ernst Kuwert, Xuwen Zhang 22. Oktober 2025

Aufgabe 1 (*zum Betrag*)
Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 2 *(Ungleichungen)*
Zeigen Sie für Zahlen $a, b, c > 0$ die Ungleichung

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

Sei die Summe von je zwei der Zahlen größer als die dritte. Beweisen Sie dann

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} < \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. Die Zahlen $a, b, c > 0$ sind genau dann Seitenlängen eines Dreiecks, wenn die Summe von je zwei Zahlen grßößer als die dritte ist.

Aufgabe 3 Beweisen Sie für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n > 0$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2.$$

Aufgabe 4 *(Induktion)*
Beweisen Sie für $n \geq 2$ die Ungleichung $n! < n^n$.
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion über n, um die Ungleichung zu beweisen.

Abgabe bis Donnerstag 30.10. um 11:00