Aufgabe 1 (*Ein Grenzwert*)
Zeigen Sie Konvergenz und berechnen Sie den Grenzwert von

$$a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} \qquad \text{für } x, y, z \geq 0.$$

Aufgabe 2 (*Zahlenverteilung*) Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Folge

$$a_n = na - [na] \quad (n \in \mathbb{N}),$$

wobei $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die Gaußklammerfunktion ist. Zeigen Sie:

(a) Die Folge hat einen Häufungspunkt.

(b) Für a rational ist die Menge der Häufungspunkte endlich.

($\star$ c) Für a irrational ist jeder Punkt in $[0, 1]$ Häufungspunkt. (zusätzliche 3 Punkte)

Aufgabe 3 *(Ein Konvergenzkriterium)*
Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

> *Jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt ihrerseits eine Teilfolge, die gegen a konvergiert.*

Zeigen Sie durch Widerspruch, dass die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Aufgabe 4 *(Mächtigkeit des Intervalls)*
Zeigen Sie, dass die Intervalle $(0, 1)$ gleichmächtig (bijektiv) zu $\mathbb{R}$ sind.

Abgabe bis Donnerstag 27.11. um 11:00