
Aufgabe 1 Berechnen Sie für die Folgen $a_n = 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \ldots$ und $b_n = 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2 \ldots$ die vier Zahlen (mit Begründung)

$$\begin{array}{lcl} \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n & \text{und} & \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n), \\ \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n & \text{und} & \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n). \end{array}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

und dass, falls Gleichheit herrscht, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

Aufgabe 3 Zeigen Sie für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$,

(b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Hinweis. Damit die rechte Seite definiert ist, muss vorausgesetzt werden dass nicht gleichzeitig $\limsup_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ und $\limsup_{n\to\infty} b_n = \mp\infty$.

Aufgabe 4 *(Supremum und Infimum: Beispiele)*
Bestimmen Sie für A und B jeweils Supremum und Infimum. Werden diese durch ein Element der Menge realisiert?

$$A = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{x + \frac{1}{x} : x > 0\right\}.$$

Abgabe bis Donnerstag 4.12. um 11:00