

**Aufgabe 1** (*Berechnung von Grenzwerten*)

Prüfen Sie, ob die nachstehenden Grenzwerte existieren (mit Beweis).

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} & \quad \text{für } h \rightarrow 0, \\ \frac{x-1}{x+1} & \quad \text{für } x \rightarrow -1, \\ \frac{z^m - 1}{z^n - 1} & \quad \text{für } z \rightarrow 1, \text{ mit } z \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (*Existenz eines Fixpunkts*)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Zeigen Sie, dass es eine Lösung  $x \in [a, b]$  der Gleichung  $f(x) = x$  gibt (eine solches  $x$  heißt Fixpunkt von  $f$ ). Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn das Intervall nicht abgeschlossen ist.

**Aufgabe 3** (*Nullstellen von Polynomen*)

Zeigen Sie, dass ein Polynom  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  hat.

**Aufgabe 4** (*Umkehrfunktion und Stetigkeit*)

Zeigen Sie, dass durch  $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$  eine stetige und bijektive Abbildung von  $(-1, 0) \cup (0, 1]$  auf das Intervall  $(-1, 1)$  gegeben ist, deren Umkehrfunktion aber nicht auf  $(-1, 1)$  stetig ist.

*Abgabe bis Donnerstag 18.12. um 11:00*