Aufgabe 1 (*starke und schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Sei $X = C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, und $E : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Dann ist laut Definition 2.5 in der Vorlesung $u \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \subset X$

1. eine *schwache lokale* Minimalstelle von E in $\mathcal{C}$, falls
$$\exists \delta_0 > 0 : \|v - u\|_{C^1} < \delta_0 \Longrightarrow E[u] \leq E[v],$$
2. eine *starke lokale* Minimalstelle von E in $\mathcal{C}$, falls
$$\exists \delta_0 > 0 : \|v - u\|_{C^0} < \delta_0 \Longrightarrow E[u] \leq E[v].$$

Sei das Funktional $E : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $E[u] = \int_0^1 (u'(t)^2 - u'(t)^4)\, dt$ und $\mathcal{C} = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass

(a) die Funktion $u = 0$ ist eine schwache lokale Minimalstelle,

(b) aber die Funktion $u = 0$ ist keine starke lokale Minimalstelle.

Hinweis: Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Folge $u_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} t & 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ -n(t-1) & 1 - \frac{1}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$
Berechnen sie $E[u_n]$ mit $n \to \infty$. Setzen sie dann $u_n^\lambda = \lambda u_n$ mit $\lambda \to 0$. Beachten sie, dass sich die Funktionen u_n durch C^1-Funktionen in $\|\cdot\|_\infty$ approximieren lassen.

Aufgabe 2 (*Minimierungsproblem ohne Lösung*) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Funktional
$$E_1(u) = \int_0^1 \Big(\big(u'(x)^2 - 1\big)^2 + u(x)^2 \Big)\, dx$$
sein Infimum auf $C^1([0, 1])$ nicht annimmt.

(b) Sei $E_2 : C^1([-1, 1]) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $E_2(u) := \int_{-1}^1 (x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3)\, dx$. Dann gilt
$$\forall \xi \in C^1([-1, 1]) : \delta E_2[0](\xi) = 0 \quad \text{und} \quad \forall \xi \in C^1([-1, 1]) \backslash \{0\} : \delta^2 E_2[0](\xi) > 0,$$
aber $u = 0$ ist keine schwache lokale Minimalstelle des Funktionals E_2.

Aufgabe 3 (*Kapillarflächen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet (i.e. offen, zusammenhängend, und nichtleer) mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Betrachte für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und κ, $\sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$E(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte für alle $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ die Variationsbedingung

$$\delta E(u, \varphi) = 0.$$

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch, änhlich wie im Beispiel zur natürlichen Randbedingung für Minimalflächen in der Vorlesung.

Aufgabe 4 (*Euler–Lagrange-Gleichung*) (4 Punkte)

Für $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Funktional $E[u] = \int_a^b F(u(x), u'(x)) \, dx$, i.e. die Lagrange-Funktion F hängt nicht von der Variable $x \in [a, b]$ ab.

(a) Leiten Sie die Euler–Lagrange-Gleichung des Funktional E her. Stellen Sie hinreichende Regularitätsannahmen an die Lagrange-Funktion F und an die Funktion u.

(b) Sei u eine Lösung der Euler–Lagrange-Gleichung. Zeigen Sie, dass die Funktion $F(u, u') - u'\partial_p F(u, u')$ konstant auf dem Interval $[a, b]$ ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 27.10.2025 vor der Vorlesung.