Aufgabe 1 (*Minimalflächen vom Rotationstyp*) (4 Punkte)

Sei $b > 0$ und $u : [0, b] \to (0, \infty)$ eine Funktion der Regularität C^1. Die Abbildung $F : [0, b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, \theta) = (x, u(x)\cos\theta, u(x)\sin\theta)$$

definiert eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ vom Rotationstyp.

(a) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathcal{A}(u) = 2\pi \int_0^b u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx.$$

(b) Betrachten sie für $B > 0$ die Menge $\mathcal{C} := \{u \in C^1([0, b]) \mid u(0) = 1, u(b) = B\}$. Benutzen sie den Erhaltungssatz aus Serie 02, Aufgabe 4b), um die Minimierer des Funktionals $\mathcal{A}$ in der Menge $\mathcal{C}$ zu finden.

Aufgabe 2 (*Ein konvexes Funktional*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränke Menge der Klasse C^1, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine konvexe Funktion und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Auf der Menge $\mathcal{C} = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\right\}$ betrachten wir das Funktional

$$E(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu)\, dx.$$

Zeigen Sie: Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ist genau dann Minimierer des Funktional E in der Menge $\mathcal{C}$, falls gilt

$$\operatorname{div}[(D_p\phi)(Du))] = g.$$

Aufgabe 3 (*Erste und zweite Variationen*) (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktionale

(a)
$$E_1[u] = \int_0^1 [u'(x)^2 + 2u(x))\, dx$$
mit der Randbedingung $u(0) = u(1) = 1$,

(b)
$$E_2[u] = \int_0^2 [u'(x)^2 + 2u(x)u'(x) + u(x)^2)\, dx$$
mit der Randbedingung $u(0) = u(2) = 1$.

Lösen sie die Euler–Lagrange-Gleichungen in $C^2([0,1])$, berechnen sie die zweite Variation der Funktionale E_1 und E_2, und diskutieren sie, ob die Lösungen der Euler–Lagrange-Gleichungen lokale oder globale Minima unter allen Funktionen $u \in C^1([0,1])$ sind, welche die gleichen Randbedingungen erfüllen.

Aufgabe 4 (*Geodäten in der hyperbolischen Ebene*) (4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$. Für die Kurve $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2_+$ betrachten wir das Energiefunktional

$$E[\gamma] := \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{(\gamma^2(t))^2} |\gamma'(t)|^2 \, dt.$$

Leiten sie die Euler–Lagrange-Gleichung her und bestimmen sie alle Lösungen (verwenden sie dazu eine Version des Erhaltungssatzes aus Serie 02, Aufgabe 4b).

Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ ist die Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ versehen mit der riemannschen Metrik $g = \frac{1}{(x^2)^2}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2)$. Das Funktional $\gamma \mapsto E(\gamma)$ ist die Energie der Kurve and das Funktional $\gamma \mapsto L(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{\gamma^2(t)} |\gamma'(t)| \, dt$ ist das Längenfunktional. Die Lösungen der Euler–Lagrange-Gleichungen, die oben erhalten worden sind, beschreiben die Geodäten der hyperbolischen Ebene.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 03.11.2025 vor der Vorlesung.