

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir betrachten die Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 u^2(x) dx.$$

Sei $u \in C^2([0, 1])$. Man beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. Ein Element u ist globaler Minimierer für das Funktional $\mathcal{F}$ in der Menge $D = C_{\text{pw}}^1([0, 1]) \cap \{u(0) = 0, u(1) = 0\}$ unter der Nebenbedingung $\mathcal{G}(u) = 1$.
2. Es gilt $\mathcal{G}(u) = 1$, $-u'' = \lambda u$ auf $[0, 1]$, $u(0) = 0, u(1) = 0$, und

$$\lambda \int_0^1 h(x)^2 dx \leq \int_0^1 h'(x)^2 dx \quad \text{für alle } h \in C_{\text{pw},c}^1([0, 1]).$$

Weiterhin gebe man das Element u und $\lambda > 0$ unter der Annahme, dass Aussage (i) oder (ii) erfüllbar sind, explizit an.

Bemerkung. Falls sie Sobolevräume aus der Funktionalanalysis kennen, wäre es besser den Raum $\tilde{D} = W_0^{1,2}([0, 1])$ anstelle des Raumes D zu untersuchen. Das gilt auch für Aufgabe 2.

Die Ungleichung $\lambda \int_0^1 h(x)^2 dx \leq \int_0^1 h'(x)^2 dx$ heißt Poincaré-Ungleichung.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Man berechne einen globalen Minimierer $u \in D = C_{\text{pw}}^1([0, 1])$ für

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx$$

unter den isoperimetrischen Nebenbedingungen

$$\mathcal{G}_1(u) = \int_0^1 u(x)^2 dx = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_2(u) = \int_0^1 u(x) dx = m,$$

sofern er existiert. Gilt bei Existenz eine Poincaré-Ungleichung für alle Funktionen $h \in C_{\text{pw}}^1([0, 1]) \cap \{\int_0^1 h(x) dx = 0\}$?

Aufgabe 3 (*Geodäten*)

(8 Punkte)

Eine Fläche S im $\mathbb{R}^3$ sei als Niveaumenge $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : g(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ definiert, wobei $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Die **Geodäten** von S sind die stetig differenzierbaren Kurven

$$t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

für die das Funktional

$$L(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \gamma_i'(t)^2} \, dt$$

unter der Nebenbedingung $g(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ einen minimalen Wert annimmt.

- (a) Man stelle für das Problem die Euler-Lagrange-Gleichung auf und gebe eine geometrische Interpretation an.
- (b) Man zeige: Die Bilder von Geodäten der Kugel, gegeben durch

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0,$$

sind Stücke von Großkreisen.

Hinweis: Man betrachte als Anfangspunkt ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ und nehme an, dass die Geodäte nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $|\gamma'(t)| = 1$. Man zeige zunächst, dass der Lagrange-Multiplikator λ konstant ist.

- (c) Man bestimme auf dem Zylinder

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$$

die Geodäte mit Startpunkt $A = (1, 0, 0)$ und Endpunkt $B = (-1, 0, 1)$. Ist diese Geodäte eindeutig bestimmt?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 10.11.2025 vor der Vorlesung.