
Aufgabe 1 (Holonome Nebenbedingungen) (6 Punkte)
Man berechne die Bahn $x : I \to \mathbb{R}^3$ einer Kugel der Masse $m > 0$, die ohne Reibung auf einer schiefen Ebene, beschrieben durch $x_1 + x_3 - 1 = 0$, von $x(0) = (0, 0, 1)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = (0, v_2, 0)$ bis zur Ebene $x_3 = 0$. Dabei wirkt nur die Erdbeschleunigung g in Richtung der negativen x_3-Achse.
Man gebe die Laufzeit an und vergleiche die Zeit mit der des freien Falls von $(0, 0, 1)$ bis $(0, 0, 0)$. Hängt die Laufzeit von der Anfangsgeschwindigkeit $(0, v_2, 0)$ ab?

Aufgabe 2 (*Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals)* (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $L(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2}dx$ bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(I)$, $p \in (1, \infty)$ unterhalbstetig ist, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.
Hinweis: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.

Aufgabe 3 (*Minimierer*) (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Man zeige, dass das Variationsproblem

$$E[u] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |Du|^2 - fu \right) dx \quad \text{in } \mathcal{U} = \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$$

einen eindeutigen Minimierer hat.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 17.11.2025 vor der Vorlesung.

Freiwillige Zusatzaufgabe (*Unterhalbstetigkeit*) (4 Punkte)
Es sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in X$, falls $f(x_0) \neq -\infty$, und falls es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ mit $r < f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt: $r < f(x)$.

1. Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist unterhalbstetig genau dann, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((a, \infty))$ offen in X ist.

2. Zeigen Sie: Das punktweise Supremum einer Familie in x_0 unterhalbstetiger Funktionen ist in x_0 unterhalbstetig.

3. Zeigen Sie: Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist $f : X \to [0, 1]$ unterhalbstetig, so gibt es eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen f_n, die punktweise gegen f konvergiert.
   Hinweis: Setze $f_n(x) = \inf\{f(y) + nd(x, y) | y \in X\}$.