

Aufgabe 1 (*Harmonische Funktion bzgl. einer riemannschen Metrik*) (4 Punkte)

Wir betrachten das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) D_i u(x) D_j u(x) \sqrt{\det g(x)} \, dx,$$

wobei $(g^{ij}(x))_{i,j=1}^n$ die inverse Matrix der positiv-definiten Matrix $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ ist. Seien $g_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ für alle $i, j = 1, 2, \dots, n$ und $\varphi \in H^1(\Omega)$.

1. Zeigen Sie, dass das Funktional $\mathcal{F}$ einen eindeutigen Minimierer in der Menge $M = \{u \in H^1(\Omega) : u - \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$ besitzt.
2. Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen des Funktional $\mathcal{F}$ unter der zusätzlichen Annahme, dass $g_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ und $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Die Minimierer des Funktional $\mathcal{F}$ heißen *harmonische Funktion bzgl. der riemannschen Metrik g* .

Aufgabe 2 (*Ein Existenzresultat*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand $\partial\Omega$, $2 < p < \infty$, und $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Wir betrachten für $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ das Funktional

$$E[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Du|^2 + \frac{1}{p} |u|^p - fu \right) dx.$$

1. Fassen sie das Funktional als Funktional $E : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf, und zeigen sie, dass $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ existiert, sodass

$$E[u_0] = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} E[u].$$

2. Nehmen sie zusätzlich an, dass $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt. Zeigen sie, dass die Lösung u_0 das folgende Randwertproblem erfüllt

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + |u_0|^{p-2} u_0 = f & \text{in } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (*Konvexität und Polykonvexität*)

(4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\alpha(p) = \alpha |p|^2 + \det(p)$$

mit $p = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, wobei $|p|^2 = \sum_{i,j=1}^2 p_{ij}^2$ ist.

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die F_α die Legendre–Hadamard-Bedingung erfüllt ist; für die F_α konvex ist; und für die F_α polykonvex ist.

Aufgabe 4 (*Subdifferential*)

(4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion. Ein Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f an der Stelle x_0 , wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die folgende Ungleichung gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle.$$

Das *Subdifferential* $\partial f(x_0)$ ist die Menge aller Subgradienten von f im Punkt x_0 .

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, unterhalbstetig, und $f \neq +\infty$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent

(a) Es gilt $x^* \in \partial f(x_0)$.

(b) Die Funktion $z \mapsto \langle x^*, z \rangle - f(z)$ nimmt ihr Maximum bei $z = x_0$ an.

2. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Bestimme das Subdifferential für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 24.11.2025 vor der Vorlesung.