

22. Juli 2026

A N A L Y S I S II

Sommersemester 2026

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische Räume	1
2	Partielle Ableitungen	11
3	Die Fréchet-Ableitung	17
4	Erste Anwendungen	27
5	Das Taylorpolynom	37
6	Potenzreihen*	45
7	Diffeomorphismen	55
8	Implizite Funktionen	61
9	Parameterabhängige Integrale	67
10	Das Anfangswertproblem	73
11	Lineare Differentialgleichungen	81
12	Separation der Variablen	87
13	Kurvenintegrale und Gradientenfelder	89

1 Metrische Räume

In Analysis 1, Definition 6.5, haben wir die Euklidische Norm von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und den Euklidischen Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert:

$$(1.1) \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$(1.2) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Damit haben wir zentrale Begriffe erklärt, etwa die ε -Umgebung eines Punkts oder die Konvergenz einer Folge. Das Konzept des Abstands bzw. einer Metrik ist nicht auf Punkte im $\mathbb{R}^n$ beschränkt, sondern spielt auch auf Mengen von Funktionen eine wichtige Rolle. Diese Idee der *Geometrisierung der Analysis* wurde von Hilbert, Fréchet und Hausdorff Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelt. Wir führen nun den Begriff des metrischen Raums (X, d) abstrakt ein, mit dem Euklidischen Raum als grundlegendes Beispiel.

Definition 1.1 (Metrischer Raum) *Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Funktion $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, die für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften hat:*

Positivität: $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit genau wenn $x = y$,

Symmetrie: $d(y, x) = d(x, y)$

Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Wir nennen $d(x, y)$ auch den Abstand von x und y .

In dieser Definition kann X eine beliebige Menge sein, insbesondere muss X kein Vektorraum sein. Betrachten Sie als Beispiel die Menge X aller Bahnhöfe in Frankreich und

$$(1.3) \quad d(x, y) = \begin{cases} \text{minimale Fahrzeit von } x \text{ nach } y \text{ über Paris} & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Viele interessante metrische Räume sind aber doch normierte Vektorräume.

Definition 1.2 (Norm) *Eine Norm auf dem reellen (oder komplexen) Vektorraum X ist eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

Positivität: $\|x\| \geq 0$, mit Gleichheit genau wenn $x = 0$.

Halblinearität: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$.

Für die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ sind Positivität und Halblinearität offensichtlich. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, siehe Analysis 1, Satz 6.4 und Satz 6.5. Andere Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel die 1-Norm und die Maximumsnorm

$$(1.4) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Jeder normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ wird zu einem metrischen Raum, indem wir den Abstand von zwei Punkten x, y erklären durch

$$(1.5) \quad d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in X.$$

Denn offensichtlich gilt $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit nur für $x = y$, sowie

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = d(x, y), \\ d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum mit dem üblichen euklidischen Abstandsbegriff.

Definition 1.3 Sei X ein metrischer Raum. Die offene Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ ist

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Bezüglich der Euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist $B_r(x_0)$ also die übliche runde Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$. Es ist instruktiv, sich die Kugeln $B_r(x_0)$ für die französische Eisenbahnmetrik aus (1.3) sowie die Kugeln $B_1(0)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ zu überlegen.

Definition 1.4 (Offene Mengen) Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt offen, falls zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Beispiel 1.1 In einem metrischen Raum X ist $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ offen. Sei nämlich $x \in B_r(x_0)$ gegeben. Dann ist $\varepsilon = r - d(x, x_0) > 0$ und für $y \in B_\varepsilon(x)$ folgt

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r,$$

also $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$, was zu zeigen war.

Satz 1.1 (Topologie) Das System der offenen Teilmengen eines metrischen Raums X bildet eine Topologie, das heißt es gelten folgende Eigenschaften:

- (a) $\emptyset, X$ sind offen.
- (b) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.
- (c) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

BEWEIS: Aussage (a) ist klar. Für (b) sei $x \in \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$, wobei $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ endlich viele offene Teilmengen von X sind. Dann gibt es $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$. Es folgt $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_i > 0$ sowie $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$ für jedes i , das heißt $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$.

Für (c) sei nun $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, wobei Λ eine beliebige Indexmenge ist. Dann ist $x \in \Omega_{\lambda_0}$ für (mindestens) ein $\lambda_0 \in \Lambda$. Da Ω_{λ_0} offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega_{\lambda_0}$, also erst recht $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$. $\square$

Ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen muss nicht offen sein. Zum Beispiel sind die Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(0)$, $n \in \mathbb{N}$, offen im $\mathbb{R}^n$, nicht aber der Schnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}.$$

Eine offene Menge $\Omega \subset X$ mit $x \in \Omega$ nennt man auch offene Umgebung von x . Insbesondere wird die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ als ε -Umgebung von x bezeichnet.

Anstatt von einer Metrik auf einer Menge X auszugehen, kann man allgemeiner mit einem System von Teilmengen von X starten, das die Eigenschaften (a),(b) und (c) erfüllt, und diese Mengen dann offen nennen. Ein solches System von Mengen heißt *Topologie* (griechisch $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$ Ort oder Lage), statt von einem metrischen Raum spricht man dann von einem topologischen Raum. Die Konzepte der Konvergenz und Stetigkeit sind auch dann noch definierbar, aber das wollen wir hier nicht vertiefen.

Lemma 1.1 (Hausdorff-Trennungseigenschaft) *In einem metrischen Raum X gibt es zu zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.*

BEWEIS: Sei $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$. Dann folgt $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\varepsilon$. Also ist die Behauptung richtig für jedes $\varepsilon \leq \frac{1}{2}d(x, y)$. $\square$

Definition 1.5 (Konvergenz) *Sei X ein metrischer Raum. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, falls gilt:*

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $x_k \in B_\varepsilon(x)$ für alle $k > K$.

Äquivalent dazu ist $d(x_k, x) \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$.

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, denn wäre $y \neq x$ ebenfalls Grenzwert von (x_k) , so wählen wir $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 1.1 und erhalten für k hinreichend groß den Widerspruch

$$x_k \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

Definition 1.6 (abgeschlossene Teilmenge) *Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt abgeschlossen, wenn folgende Implikation stets gilt:*

$$x_k \in A, \quad x_k \rightarrow x \in X \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Die Eigenschaften *offen* und *abgeschlossen* sind nicht Gegensätze. Die leere Menge und ganz X sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Es gilt aber folgende Komplementarität.

Satz 1.2 *In einem metrischen Raum X gilt für jede Menge $M \subset X$:*

$$M \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad X \setminus M \text{ abgeschlossen.}$$

BEWEIS: Sei erst M offen, wir zeigen dass $X \setminus M$ abgeschlossen ist. Sei dazu $x_k \in X \setminus M$ eine Folge mit $x_k \rightarrow x$. Wäre $x \in M$, so gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(x) \subset M$. Aber für k groß folgt dann $x_k \in B_\varepsilon(x) \subset M$, Widerspruch. Somit ist $x \in X \setminus M$, also $X \setminus M$ abgeschlossen.

Sei nun $X \setminus M$ abgeschlossen. Angenommen zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_k \in B_{1/k}(x)$ mit $x_k \in X \setminus M$. Wegen $x_k \rightarrow x$ folgt $x \in X \setminus M$, Widerspruch. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $B_{1/k}(x) \subset M$, und damit ist M offen. $\square$

Folgerung 1.1 *Für die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums X gilt:*

a) $\emptyset, X$ sind abgeschlossen.

b) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

c) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

BEWEIS: Folgt aus Satz 1.1 und Satz 1.2. $\square$

Die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen ist nicht notwendig abgeschlossen, zum Beispiel $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Beispiel 1.2 (induzierte Metrik) Sei (X, d) metrischer Raum. Auf jeder Menge $M \subset X$ haben wir dann die induzierte Metrik

$$(1.6) \quad d^M : M \times M \rightarrow [0, \infty), \quad d^M(x, y) = d(x, y),$$

und (M, d^M) ist selbst ein metrischer Raum. Zum Beispiel ist die Sphäre $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ein metrischer Raum mit dem Euklidischen Abstand $d^{\mathbb{S}}(x, y) = \|x - y\|$. Die Kugeln in (M, d^M) sind genau die Schnitte von Kugeln $B_r(x)$ in X mit M , denn

$$B_r^M(x) = \{y \in M : d^M(y, x) < r\} = \{y \in M : d(y, x) < r\} = M \cap B_r(x).$$

Die offenen Mengen in (M, d^M) sind nun genau die Mengen $M \cap \tilde{U}$ mit $\tilde{U}$ offen in X . Denn ist $x \in M \cap \tilde{U}$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \tilde{U}$, also $B_\varepsilon^M(x) = M \cap B_\varepsilon(x) \subset M \cap \tilde{U}$. Die Mengen dieses Typs sind damit offen. Ist umgekehrt $U \subset (M, d^M)$ eine beliebige offene Menge, so gibt es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{\varepsilon(x)}^M(x) \subset U$. Es folgt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}^M(x) = \bigcup_{x \in U} M \cap B_{\varepsilon(x)}(x) = M \cap \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x).$$

Also hat U die Form $M \cap \tilde{U}$ mit $\tilde{U}$ offen in X . Weiter ergibt sich: die abgeschlossenen Mengen in (M, d^M) sind genau die Mengen $M \cap \tilde{A}$ mit $\tilde{A}$ abgeschlossen in X (Übungsaufgabe).

In der eindimensionalen Analysis wurden meist Funktionen auf einem Intervall I mit Randpunkten $a < b$ betrachtet. Im mehrdimensionalen Fall werden wir oft Kugeln $B_r(x)$ oder achsenparallele Quader $I_1 \times \dots \times I_n$ betrachten, bisweilen aber auch kompliziertere Mengen. Dafür sind die folgenden Begriffe nützlich.

Definition 1.7 Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \text{int } M &= \{x \in M : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset M\} && \text{(Menge der inneren Punkte von } M), \\ \overline{M} &= \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset\} && \text{(Abschluss von } M), \\ \partial M &= \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ sind } B_\varepsilon(x) \cap M, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset\} && \text{(Rand von } M). \end{aligned}$$

Trivialerweise gilt $\text{int } M \subset M \subset \overline{M}$. Außerdem ist $\text{int } \Omega = \Omega$ für $\Omega \subset X$ offen sowie $\overline{M} = M$ für $M \subset X$ abgeschlossen.

Beispiel 1.3 Auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Abstandsfunktion $d(x, y) = \|x - y\|$ gilt für die Kugel $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, x) < r\}$:

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, x) \leq r\} \quad \text{und} \quad \partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, x) = r\}.$$

Beweis Übungsaufgabe.

Satz 1.3 *Sei M Teilmenge des metrischen Raums X .*

(a) *$\text{int } M$ ist offen, und es gilt die Implikation*

$$\Omega \text{ offen, } \Omega \subset M \quad \Rightarrow \quad \Omega \subset \text{int } M.$$

(b) *$\overline{M}$ ist abgeschlossen, und es gilt die Implikation*

$$A \text{ abgeschlossen, } A \supset M \quad \Rightarrow \quad A \supset \overline{M}.$$

(c) *∂M ist abgeschlossen und es gilt $\partial M = \overline{M} \setminus \text{int } M$.*

BEWEIS: Für (a) sei $x \in \text{int } M$, also $B_r(x) \subset M$ für ein $r > 0$. Für $y \in B_r(x)$ gilt dann $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \subset M$ mit $\varepsilon = r - d(y, x) > 0$, vgl. Beispiel 1.1. Es folgt $B_r(x) \subset \text{int } M$, damit ist $\text{int } M$ offen. Sei nun Ω offen und $\Omega \subset M$. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, also auch $B_\varepsilon(x) \subset M$, das heißt $x \in \text{int } M$.

Für (b) verwenden wir (a) und Satz 1.2. Nach Definition ist $X \setminus \overline{M} = \text{int}(X \setminus M)$, also ist $\overline{M} = X \setminus \text{int}(X \setminus M)$ abgeschlossen. Ist nun $A \subset X$ eine beliebige abgeschlossene Menge mit $A \supset M$, so ist $X \setminus A$ offen sowie $X \setminus A \subset X \setminus M$, also $X \setminus A \subset \text{int}(X \setminus M)$ nach (a), und somit $A \supset \overline{M}$. Dies beweist (b).

Nach Definition gilt weiter $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$, also ist ∂M abgeschlossen nach (b) und Folgerung 1.1. Ferner ist ebenfalls nach Definition $X \setminus \text{int } M = \overline{X \setminus M}$, folglich

$$\partial M = \overline{M} \cap (X \setminus \text{int } M) = \overline{M} \setminus \text{int } M.$$

□

Die Punkte in $\overline{M}$ sind entweder Häufungspunkte oder isolierte Punkte von M .

Definition 1.8 *Ein Punkt $x \in X$ heißt*

$$\begin{aligned} \text{Häufungspunkt von } M &\Leftrightarrow \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ ist } M \cap B_\varepsilon(x) \setminus \{x\} \text{ nichtleer,} \\ \text{isolierter Punkt von } M &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } M \cap B_\varepsilon(x) = \{x\}. \end{aligned}$$

Ist $x \in X$ Häufungspunkt von M , so enthält $B_\varepsilon(x) \cap M \setminus \{x\}$ sogar unendlich viele Punkte. Denn würde die Menge nur aus endlich vielen Punkten $y_1, \dots, y_N$ bestehen, so ist $\delta = \min_{1 \leq i \leq N} d(y_i, x) > 0$ und dann $B_\delta(x) \cap M \setminus \{x\} = \emptyset$, ein Widerspruch. Insbesondere können wir eine Folge $x_k \in M \setminus \{x\}$ bestimmen mit $x_k \rightarrow x$.

Definition 1.9 *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums X heißt dicht, falls $\overline{M} = X$.*

Bekanntes Beispiel sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ im metrischen Raum $\mathbb{R}$, beziehungsweise die rationalen Punkte $\mathbb{Q}^n$ im $\mathbb{R}^n$.

Neben der Offenheit und Abgeschlossenheit spielte in Analysis 1 eine dritte Eigenschaft von Mengen eine wesentliche Rolle, nämlich die Kompaktheit.

Definition 1.10 (Folgenkompaktheit) *Eine Menge $M \subset (X, d)$ heißt kompakt, wenn jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in M eine Teilfolge $(x_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ hat, die gegen ein $x \in M$ konvergiert.*

Eine Teilmenge M von (X, d) ist genau dann kompakt, wenn der metrische Raum (M, d^M) kompakt ist. Denn die induzierte Metrik d^M ist die Einschränkung von d auf M , also bedeuten Konvergenz bezüglich d und d^M dasselbe.

Kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind durch das Kriterium von Heine-Borel charakterisiert, siehe Analysis 1, Satz 10.1.

Satz 1.4 (Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$) *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Diese Aussage ist aber in vielen metrischen Räumen falsch, das heißt es kann abgeschlossene und beschränkte Teilmengen geben, die nicht kompakt sind.

Definition 1.11 (Stetigkeit) *Seien X, Y metrische Räume, und $M \subset X$. Eine Abbildung $f : M \rightarrow Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } d(x, x_0) < \delta,$$

oder äquivalent mit $f(M \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Die Abbildung f heißt stetig (als Ganzes), wenn f in jedem Punkt $x_0 \in M$ stetig ist.

Wir müssten hier eigentlich $d_X(\cdot, \cdot)$ und $d_Y(\cdot, \cdot)$ schreiben, denn X und Y sind ja verschiedene metrische Räume. Die folgende Eigenschaft impliziert Stetigkeit (aber nicht umgekehrt).

Definition 1.12 (Lipschitz) *$f : M \rightarrow Y$ heißt Lipschitzstetig mit Konstante $L \geq 0$, falls*

$$d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in M.$$

Beispiel 1.4 Die Abstandsfunktion von einem Punkt $x_0 \in X$, das heißt

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = d(x, x_0),$$

ist Lipschitzstetig mit Konstante $L = 1$, denn aus der Dreiecksungleichung folgt

$$f(x) = d(x, x_0) \leq d(x, x') + d(x', x_0) = d(x, x') + f(x').$$

Durch Vertauschen von x und x' folgt $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$ wie gewünscht.

Die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kann alternativ mittels Folgen beschrieben werden. Der Beweis aus Analysis 1, Satz 7.1, gilt ganz analog.

Satz 1.5 (Folgenkriterium der Stetigkeit) *Seien X, Y metrische Räume, und $x_0 \in M \subset X$. Für $f : M \rightarrow Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) *f ist stetig in x_0 .*
- (2) *Für jede Folge $x_k \in M$ mit $x_k \rightarrow x_0$ gilt $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$.*

Eine nützliche Eigenschaft von stetigen Abbildungen ist die folgende.

Satz 1.6 (offene Urbilder) *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X .*

BEWEIS: Sei $x_0 \in f^{-1}(V)$. Dann ist $y_0 = f(x_0) \in V$, also $B_\varepsilon(y_0) \subset V$ für ein $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0) \subset V$, also $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(V)$. Somit ist $f^{-1}(V)$ offen wie behauptet. $\square$

Die Aussage hat eine Umkehrung: wenn $f^{-1}(V)$ offen in X ist für alle offenen $V \subset Y$, so ist f stetig. Dies verwendet nur die offenen Mengen (und nicht die Metriken), deshalb spielt es eine Rolle in topologischen Räumen. Aber in dieser Vorlesung ist es nicht relevant. Folgende Aussagen über Stetigkeit und kompakte Mengen sind ebenfalls nützlich.

Satz 1.7 (Bilder kompakter Mengen) *Seien X, Y metrische Räume. Ist $M \subset X$ kompakt und $f : M \rightarrow Y$ stetig, so gilt:*

- (1) $f(M)$ ist kompakte Teilmenge von Y .
- (2) Ist f injektiv, so ist $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ stetig.

BEWEIS: Sei y_k eine Folge in $N = f(M)$, also $y_k = f(x_k)$ mit $x_k \in M$. Da M kompakt, gibt es eine Teilfolge mit $x_{k_j} \rightarrow x \in M$. Aus der Stetigkeit von f folgt $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \rightarrow f(x) \in N$.

Sei nun f injektiv. Wäre $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ nicht stetig in $y = f(x)$, so gibt es eine Folge $y_k = f(x_k)$ mit $y_k \rightarrow y$, aber x_k konvergiert nicht gegen x . Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge x_{k_j} mit $d(x_{k_j}, x) \geq \varepsilon$ für alle j . Da M kompakt gilt nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge $x_{k_j} \rightarrow x' \in M$, insbesondere $d(x', x) \geq \varepsilon > 0$. Aber f ist stetig in x' , es folgt also $f(x') = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = y$, im Widerspruch zur Injektivität von f . $\square$

Satz 1.8 (Extrema) *Sei M kompakte Teilmenge des metrischen Raums X . Dann ist jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und nimmt ihr Infimum und Supremum an.*

BEWEIS: vgl. Analysis 1, Satz 10.2. $\square$

Beispiel 1.5 Sei X metrischer Raum. Nach Beispiel 1.4 ist für jedes $x_0 \in X$ die Funktion $d(\cdot, x_0)$ Lipschitz stetig. Auf einer kompakten Menge $K \subset X$ nimmt sie damit ihr Infimum an, das heißt es gibt einen nächsten Punkt $x \in K$ zu x_0 , es gilt also

$$d(x, x_0) = \inf_{y \in K} d(y, x_0) = \text{dist}(x_0, K).$$

Der Punkt x muss nicht eindeutig sein, betrachte etwa $K = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$.

Eine weitere Konsequenz der Kompaktheit ist wie folgt:

Satz 1.9 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Sei X kompakter metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sogar gleichmäßig stetig.*

BEWEIS: vgl. Analysis 1, Satz 13.4. Nach Definition ist f gleichmäßig stetig wenn

$$\lim_{\delta \searrow 0} \omega_f(\delta) = 0 \quad \text{wobei} \quad \omega_f(\delta) = \sup_{d(x, x') < \delta} d(f(x), f(x')).$$

Dazu äquivalent ist folgende Aussage (prüfen!): zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$d(f(x), f(x')) < \varepsilon \quad \text{für alle } x, x' \in X \text{ mit } d(x, x') < \delta.$$

Wäre also f nicht gleichmäßig stetig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und Folgen $x_n, x'_n \in X$ mit $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$, aber $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. Da X kompakt, konvergiert die Folge x_n nach evtl. Auswahl einer Teilfolge gegen ein $x \in X$. Wegen $d(x'_n, x) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, x)$ konvergiert dann auch die Folge x'_n gegen dieses x , und wegen Stetigkeit folgt

$$\varepsilon \leq d(f(x_n), f(x'_n)) \leq d(f(x_n), f(x)) + d(f(x), f(x'_n)) \rightarrow 0,$$

ein Widerspruch. □

Wir kommen jetzt zum letzten Thema dieses Kapitels.

Definition 1.13 (Zusammenhang) Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn folgende Implikation gilt: ist $E \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und offen, so ist $E = X$.

Diese Definition ist Standard. Alternativ kann man den Zusammenhang mittels lokal konstanter Funktionen charakterisieren. Dabei heißt $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal konstant, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung hat mit $f|_U$ konstant.

Lemma 1.2 Für einen metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) X ist zusammenhängend.
- (b) Jede lokal konstante Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist konstant.

BEWEIS: Für (a) $\Rightarrow$ (b) sei eine lokal konstante Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Zu zeigen ist f konstant. Wähle dazu ein $x_0 \in X$ und betrachte $E = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$. Dann ist $E \neq \emptyset$ wegen $x_0 \in E$. Ist $x \in E$ und U offene Umgebung mit $f|_U$ konstant, so folgt $f|_U = f(x) = f(x_0)$, also $U \subset E$ und damit E offen. Ist andererseits $x_k \in E$ mit $x_k \rightarrow x$, so folgt $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$ wegen f stetig, also E abgeschlossen. Nach (a) gilt nun $E = X$ bzw. $f(x) = f(x_0)$ für alle $x \in X$, also f konstant.

Es gelte nun (b), und $E \subset X$ sei nichtleer, offen und abgeschlossen. Zu zeigen ist $E = X$. Sei

$$\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}, \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{für } x \notin E. \end{cases}$$

Da E und $X \setminus E$ offen sind, ist χ_E lokal konstant und damit konstant. Da E nichtleer folgt $\chi_E \equiv 1$ und damit $E = X$. □

Der Zusammenhang eines Raums hängt von der Metrik ab. In Aussage (b) des Lemmas steckt das in dem Wort *lokal*. Ist U offene Umgebung von x , so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$, siehe Definition 1.4. Also ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann lokal konstant, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f|_{B_\varepsilon(x)}$ konstant.

Eine Teilmenge X von (Y, d) heißt zusammenhängend, wenn der metrische Raum (X, d^X) zusammenhängend ist. Nach Beispiel 1.2 sind die Kugeln bezüglich der induzierten Metrik d^X genau von der Form $X \cap B_\varepsilon(x)$. Also ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann lokal konstant, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f|_{X \cap B_\varepsilon(x)}$ konstant.

Satz 1.10 (zusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}$) Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (verallgemeinertes) Intervall ist.

BEWEIS: Sei X ein Intervall, das heißt $(a, b) \subset X$ mit $a = \inf X$, $b = \sup X$. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal konstant, zu zeigen ist f konstant. Im Fall $a = b$ besteht X aus höchstens einem Punkt, dann ist die Behauptung klar. Sonst gibt es zu $x \in (a, b)$ eine Umgebung $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ auf der f konstant ist. Es folgt $f'(x) = 0$ und damit f konstant auf (a, b) nach dem Mittelwertsatz, siehe Folgerung 10.1 in Analysis 1. Im Fall $a \in X$ bzw. $b \in X$ ist weiter f konstant auf $[a, a + \varepsilon)$ bzw. $(b - \varepsilon, b]$, und damit konstant auf ganz X .

Sei umgekehrt X zusammenhängend. Wir zeigen $(a, b) \subset X$ mit a, b wie oben. Angenommen es gibt $x_0 \in (a, b)$ mit $x_0 \notin X$. Betrachte

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0, \\ 1 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

f ist lokal konstant auf X , also konstant. Entweder ist dann $X \subset (x_0, \infty)$ und $a = \inf X \geq x_0$ oder $X \subset (-\infty, x_0)$ und $b = \sup X \leq x_0$, Widerspruch zu $x_0 \in (a, b)$. $\square$

Lemma 1.3 *Seien X, Y metrische Räume. Ist X zusammenhängend und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ auch zusammenhängend.*

BEWEIS: Sei $g : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal konstant, das heißt zu $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ mit $g|_{f(X) \cap V}$ konstant. Dann ist $g \circ f$ konstant auf $f^{-1}(V) \ni x$. Da X zusammenhängend ist $g \circ f$ konstant, und damit ist $g : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$ konstant. $\square$

Aus dem Lemma und Satz 1.10 ergibt sich der Zwischenwertsatz, in folgender Form.

Folgerung 1.2 *Ist X zusammenhängend und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Ein metrischer Raum X heißt wegweise zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ einen stetigen Weg $c : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$. Aus wegweise zusammenhängend folgt zusammenhängend. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch, sie gilt aber wenn X offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für diese Aussagen siehe Übungsaufgaben.

2 Partielle Ableitungen

Für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ gibt es mehrere Ableitungskonzepte. Die partiellen Ableitungen sind am einfachsten, es sind die eindimensionalen Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen. Im Folgenden bezeichnet $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, also $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ mit der 1 an der j -ten Stelle.

Definition 2.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle $x \in \Omega$ ist der Grenzwert (falls existent)

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + te_j)|_{t=0}.$$

Andere Bezeichnungen: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ oder $f_{x_j}(x)$.

Halten wir alle x_i mit $i \neq j$ fest, so ergibt sich lokal die Funktion einer Variablen

$$\varphi(s) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad \text{für } s \in (x_j - \delta, x_j + \delta).$$

Die Ableitung von φ im Punkt $s = x_j$ ist

$$\varphi'(x_j) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_j + t) - \varphi(x_j)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \partial_j f(x).$$

Bei der Berechnung der partiellen Ableitung $\partial_j f$ können wir also die gewohnte eindimensionale Ableitung nach x_j bilden und dabei die anderen Variablen als Konstanten behandeln.

Die wohlbekannten Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen ergeben in diesem Kontext direkt folgende Aussagen.

Satz 2.1 (Ableitungsregeln) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$. Die Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ und $\partial_j g(x)$ sei hier stets vorausgesetzt. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Linearität: für $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\partial_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \partial_j f(x) + \beta \partial_j g(x).$$

(b) Komponentenweise Differentiation: für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt, wenn eine der Seiten existiert,

$$\partial_j f(x) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x) e_i.$$

(c) Produktregel: für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\partial_j(fg)(x) = (\partial_j f)(x)g(x) + f(x)(\partial_j g)(x).$$

(d) Quotientenregel: für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ gilt

$$\partial_j \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{(\partial_j f)(x)g(x) - f(x)(\partial_j g)(x)}{g(x)^2}.$$

(e) Kettenregel: sei f reellwertig. Ist I offenes Intervall mit $f(\Omega) \subset I$ und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt

$$\partial_j(\varphi \circ f)(x) = \varphi'(f(x))\partial_j f(x).$$

Beispiel 2.1 Wir betrachten die Euklidische Abstandsfunktion vom Nullpunkt

$$r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

In $x \neq 0$ existieren die partiellen Ableitungen, und zwar gilt mit der Kettenregel

$$\partial_j r(x) = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Im Punkt $x = 0$ existieren die partiellen Ableitungen nicht, denn $r(0 + te_i) = |t|$ ist in $t = 0$ nicht differenzierbar. Aber für $x \neq 0$ ist die Funktion $\partial_j r$ wieder partiell differenzierbar; wir erhalten mit der Quotientenregel die zweiten partiellen Ableitungen

$$\partial_i(\partial_j r)(x) = \frac{(\partial_i x_j)r - x_j \partial_i r}{r^2} = \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Für $f = \varphi \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, folgt

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \varphi'(r)\partial_j r = \varphi'(r)\frac{x_j}{r}, \\ \partial_i(\partial_j f)(x) &= \varphi''(r)\partial_i r \partial_j r + \varphi'(r)\partial_i(\partial_j r) = \varphi''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Laplaceoperator

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f.$$

Die Gleichung $\Delta f = 0$ spielt in der komplexen Analysis, der Theorie der Minimalflächen und der Elektrostatik eine zentrale Rolle, ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Wir rechnen jetzt die rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen aus, und zwar erhalten wir die Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}(r^{n-1}\varphi'(r))'.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind, mit Integrationskonstanten $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(r) = \begin{cases} a \frac{r^{2-n}}{2-n} + b & \text{für } n \geq 3 \\ a \log r + b & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Für $n = 3$ ist $f(x) = -\frac{1}{r}$ das Coulombpotential einer Punktladung.

Wir wollen nun zweite und höhere partielle Ableitungen allgemein einführen. Für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei die Ableitungsfunktion $\partial_j f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert. Wir setzen, falls existent,

$$(2.1) \quad \partial_{ij}^2 f(x) := \partial_i(\partial_j f)(x) \quad (\text{alternative Notation } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \text{ oder } f_{x_i x_j}(x)).$$

Entsprechend für Ableitungen k -ter Ordnung: seien $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Ist die Funktion $\partial_{i_2 \dots i_k}^{k-1} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ bereits definiert so setzen wir, falls existent,

$$(2.2) \quad \partial_{i_1 \dots i_k}^k f(x) = \partial_{i_1}(\partial_{i_2 \dots i_k}^{k-1} f)(x).$$

Für viele Anwendungen ist es wesentlich, dass die partiellen Ableitungen nicht nur existieren sondern zusätzlich stetige Funktionen sind.

Definition 2.2 (C^k -Räume) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wir bezeichnen mit $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit Werten im $\mathbb{R}^m$, das heißt alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1 \dots i_j}^j f$ der Ordnung $j \leq k$ (bzw. $j < \infty$ im Fall $k = \infty$) sind definiert und stetig auf Ω . Im reellwertigen Fall, also $m = 1$, schreiben wir kürzer $C^k(\Omega) = C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

Wir kommen nun zu der Frage, ob die Ableitungen ∂_i und ∂_j vertauschen. Allein aus der Existenz der zweiten partiellen Ableitungen folgt das nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$(2.3) \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt $\partial_2 f(x, 0) = x$ und $\partial_1 f(0, y) = -y$. Im Fall $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ folgt das mit der Produktregel, für $x = 0$ bzw. $y = 0$ ergibt es sich aus $f(0, y) = f(x, 0) = 0$. Also gilt

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = 1 \quad \text{aber} \quad \partial_2 \partial_1 f(0, 0) = -1.$$

Beide zweiten Ableitungen existieren, aber sie sind nicht gleich.

Satz 2.2 (von Schwarz¹) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^2(\Omega)$, so vertauschen für $1 \leq i, j \leq n$ die Ableitungen nach x_i und x_j , das heißt

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \quad \text{auf } \Omega.$$

BEWEIS: Zuerst ein paar Fakten zu Differenzenquotienten. Für $g \in C^1(\Omega)$ ist nach Definition

$$(2.4) \quad \partial_i g(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_i^s g(x) \quad \text{mit} \quad \Delta_i^s g(x) = \frac{g(x + se_i) - g(x)}{s}.$$

Es gilt $\frac{d}{ds} g(x + se_i) = \partial_i g(x + se_i)$, also folgt aus dem Mittelwertsatz eine Darstellung

$$(2.5) \quad \Delta_i^s g(x) = \partial_i g(x + \alpha se_i) \quad \text{für ein } \alpha \in [0, 1].$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_i(\Delta_j^t g)(x) &= \frac{d}{ds}(\Delta_j^t g)(x + se_i)|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \frac{g(x + se_i + te_j) - g(x + se_i)}{t} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial_i g(x + te_j) - \partial_i g(x)}{t}, \end{aligned}$$

also gilt die Vertauschungsregel

$$(2.6) \quad \partial_i(\Delta_j^t g)(x) = \Delta_j^t(\partial_i g)(x).$$

Nun betrachte für $s, t \neq 0$ den zweiten Differenzenquotienten $\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x)$. Es gilt

$$\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \frac{(\Delta_j^t f)(x + se_i) - (\Delta_j^t f)(x)}{s} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial_j f(x + se_i) - \partial_j f(x)}{s} = \Delta_i^s(\partial_j f)(x),$$

das heißt

$$(2.7) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \Delta_i^s(\partial_j f)(x).$$

Jetzt wenden wir die Regeln an. Wir berechnen mit $\alpha, \beta \in [0, 1]$ geeignet

$$\begin{aligned} \Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) &= \partial_i(\Delta_j^t f)(x + \alpha se_i) \quad \text{nach (2.5)} \\ &= \Delta_j^t(\partial_i f)(x + \alpha se_i) \quad \text{nach (2.6)} \\ &= \partial_j(\partial_i f)(x + \alpha se_i + \beta te_j) \quad \text{nach (2.5)}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\partial_j(\partial_i f)$ im Punkt x stetig. Somit gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$(2.8) \quad |\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) - \partial_j(\partial_i f)(x)| < \varepsilon \quad \text{für } 0 < |s|, |t| < \delta.$$

Hier lassen wir $t \rightarrow 0$ gehen, es folgt wegen (2.7)

$$|\Delta_i^s(\partial_j f)(x) - \partial_j(\partial_i f)(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für } 0 < |s| < \delta.$$

Nach Definition der partiellen Ableitung, siehe (2.4), ist das die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Der Beweis zeigt etwas mehr: falls die Ableitungen $\partial_i f$, $\partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ auf einer Umgebung von x existieren und $\partial_j \partial_i f$ stetig in x ist, so existiert auch die Ableitung $\partial_i \partial_j f(x)$ und sie ist gleich $\partial_j \partial_i f(x)$.

Folgerung 2.1 Für eine Funktion $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k , das heißt für jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt

$$\partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(k)}} f = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f.$$

BEWEIS: Nach Satz 2.2 können benachbarte Operatoren ∂_i, ∂_j vertauscht werden. Die symmetrische Gruppe wird durch Vertauschungen erzeugt (siehe Lineare Algebra). $\square$

Der Begriff der partiellen Ableitung allein ist nicht geeignet, um die mehrdimensionale Differentialrechnung zu entwickeln. Entscheidendes Manko ist, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ in $x \in \Omega$ nicht die Stetigkeit von f im Punkt x folgt.

Beispiel 2.2 Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann gilt $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$, insbesondere $\partial_1 f(0, 0) = 0 = \partial_2 f(0, 0)$. Aber für $c(t) = (t, t)$ gilt $f(c(t)) = 1/2$ für alle $t \neq 0$, das heißt f ist nicht stetig im Nullpunkt.

Also kann die Verkettung $f \circ c$ mit einer Kurve unstetig sein. Aber dann ist $f \circ c$ auch nicht differenzierbar, siehe Analysis 1, Satz 9.1, und eine Kettenregel kann es nicht geben. Die Definition der partiellen Ableitungen macht explizit von den Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ Gebrauch. Es wäre denkbar, dass sich ein besserer Ableitungsbegriff ergibt, wenn alle Richtungen gleichberechtigt betrachtet werden. Dies führt auf den Begriff der Richtungsableitung.

Definition 2.3 (Richtungsableitung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Richtungsableitung von f an der Stelle $x \in \Omega$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist der Grenzwert (falls existent)

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0}.$$

Beispiel 2.3 Die Richtungsableitung von $r(x) = |x|$ in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\partial_v r(x) = \frac{d}{dt} \sqrt{|x|^2 + 2t\langle x, v \rangle + t^2|v|^2} |_{t=0} = \left\langle \frac{x}{|x|}, v \right\rangle.$$

Es gibt aber wieder schlechte Nachrichten: selbst wenn in $x \in \Omega$ alle Richtungsableitungen existieren, kann die Funktion im Punkt x trotzdem unstetig sein.

Beispiel 2.4 Betrachte jetzt auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann existieren im Punkt $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen, denn für $v = (a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab^2}{a^2 + t^2b^4} = \begin{cases} 2b^2/a & \text{für } a \neq 0 \\ 0 & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Dennoch ist f im Nullpunkt unstetig, denn für $c(t) = (t^2, t)$ gilt $f(c(t)) = 1$ für alle $t \neq 0$.

3 Die Fréchet-Ableitung

Das Konzept der mehrdimensionalen Ableitung beruht auf dem Ansatz, dass eine differenzierbare Funktion mit einer affin-linearen Funktion lokal in erster Ordnung übereinstimmt, siehe Analysis 1, Lemma 9.2. Zur Abgrenzung von den partiellen Ableitungen verwendet man auch den Begriff der totalen Ableitung. Wir betrachten hier Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, den Raum der linearen Abbildungen bezeichnen wir mit $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Die Definition ist aber auch für beliebige normierte Räumen X, Y sinnvoll, nur muss dann $L(X, Y)$ als Raum der stetigen linearen Abbildungen erklärt werden. Man spricht von Differenzierbarkeit im Sinne von Fréchet.

Definition 3.1 (Ableitung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$(3.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

Durch Substitution $h = x - x_0$ erhalten wir die äquivalente Fassung

$$(3.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)}{|h|} = 0.$$

Die Abbildung A heißt Ableitung von f in x_0 , wir schreiben $Df(x_0) = A$.

Damit wir von der Ableitung A reden können muss sie eindeutig sein. Dazu zeigen wir dass aus (3.1) die Existenz der Richtungsableitungen folgt, und dass A durch diese gegeben ist:

$$(3.3) \quad \partial_v f(x_0) = Av \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Und zwar berechnen wir für $v \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - Av &= \frac{f(x_0 + tv) - (f(x_0) + A(tv))}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + tv) - (f(x_0) + A(tv))}{|tv|} |v|. \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ geht die rechte Seite gegen Null nach (3.1), also folgt $\partial_v f(x_0) = Av$.

Eine Basis kommt in der Definition der Ableitung nicht vor. Zum Rechnen werden aber in aller Regel die Standardbasen benutzt. Eine lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ hat dann eine zugehörige Matrix $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$, und zwar gilt

$$Ax = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j e_i.$$

Umgekehrt entspricht jeder Matrix $a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ durch diese Formel eine lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Oft wird zwischen linearer Abbildung und Matrix gar nicht unterschieden.

Satz 3.1 (Jacobimatrix) Die Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ habe in $x_0 \in \Omega$ die Ableitung $Df(x_0)$. Dann existieren in x_0 die partiellen Ableitungen, und $Df(x_0)$ hat bezüglich der Standardbasen die Matrixdarstellung (Jacobimatrix)

$$(3.4) \quad (\partial_j f_i(x_0)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

BEWEIS: Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen nach den Koordinatenvektoren e_j , sie sind durch (3.3) gegeben. Nach Satz 2.1 kann die Ableitung komponentenweise berechnet werden, also folgt

$$Df(x_0)e_j = \partial_j f(x_0) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x_0)e_i.$$

□

Um die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ zu zeigen, kann man in zwei Schritten vorgehen. Erstens berechnet man die Jacobimatrix, also die partiellen Ableitungen im Punkt x . Zweitens prüft man, ob die Entwicklung (3.1) gilt, wenn A die Jacobimatrix ist. Nach Satz 3.1 ist das die einzig mögliche Wahl.

Beispiel 3.1 Die komplexe Funktion $f(z) = z^2$ lautet in reellen Koordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \text{wobei } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben die Punkte im $\mathbb{R}^2$ hier als Spaltenvektoren, zwecks Konsistenz mit der Notation der Jacobimatrix. Diese ist

$$A = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir für $\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ nach (3.1) den Approximationsfehler

$$\begin{aligned} f(z + \zeta) - (f(z) + A\zeta) &= \begin{pmatrix} (x + \xi)^2 - (y + \eta)^2 \\ 2(x + \xi)(y + \eta) \end{pmatrix} \\ &\quad - \left(\begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \xi^2 - \eta^2 \\ 2\xi\eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit $|\zeta| = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$ ist die Norm rechts abgeschätzt durch $C|\zeta|^2$, also folgt

$$\frac{f(z + \zeta) - (f(z) + A\zeta)}{|\zeta|} \rightarrow 0 \quad \text{mit } \zeta \rightarrow 0.$$

Beispiel 3.2 (Lineare Abbildungen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dann ist

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

in allen $x_0 \in \Omega$ differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) = A$. Dies folgt sofort wegen $f(x_0 + h) = A(x_0 + h) = Ax_0 + Ah = f(x_0) + Ah$.

Beispiel 3.3 (Quadratische Formen) Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Wir betrachten die quadratische Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} b(x, x).$$

Wir behaupten $Df(x)h = b(x, h)$ bzw. $Df(x) = b(x, \cdot)$. Das ist eine lineare Funktion, es gilt

$$\frac{f(x+h) - (f(x) + b(x, h))}{|h|} = \frac{1}{2} \frac{b(h, h)}{|h|}.$$

Mit $h \rightarrow 0$ geht die rechte Seite gegen Null, denn

$$|b(h, h)| \leq \sum_{i,j=1}^n |b(e_i, e_j)| |h_i| |h_j| \leq C |h|^2 \quad \text{mit } C = \sum_{i,j=1}^n |b(e_i, e_j)|.$$

Beispiel 3.4 (Funktionen einer Variablen) Natürlich muss das Konzept auch in diesem Fall Sinn machen. Die Funktion $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ habe in $x \in I$ die Ableitung $f'(x) \in \mathbb{R}^m$ im Sinne von Analysis 1. Dann ist f differenzierbar in x im Sinne von Definition 3.1 mit

$$Df(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad Df(x)h = f'(x)h.$$

Denn es gilt für $h \neq 0$, siehe auch Lemma 9.2 in Analysis 1,

$$\frac{|f(x+h) - (f(x) + f'(x)h)|}{|h|} = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

Für reelle Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, also Element des Dualraums von $\mathbb{R}^n$. Es ist anschaulicher, den zugehörigen Vektor im $\mathbb{R}^n$ zu betrachten.

Definition 3.2 (Gradient) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \Omega$. Der Gradient von f im Punkt x ist der Vektor

$$\text{grad } f(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) e_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Formal gehen wir vom Zeilenvektor $Df(x)$ zum Spaltenvektor $\text{grad } f(x)$ mit denselben Einträgen über. Eine Charakterisierung ohne Koordinaten ist wie folgt: der Gradient ist der eindeutig bestimmte Vektor im $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$(3.5) \quad \langle \text{grad } f(x), v \rangle = Df(x)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Ist $\text{grad } f(x) = 0$, so heißt x kritischer Punkt von f . Ist x nicht kritisch, so ist die Richtung von $\text{grad } f(x)$ diejenige, in der f am stärksten ansteigt. Denn für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$(3.6) \quad \partial_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle \leq |\text{grad } f(x)|, \quad \text{Gleichheit genau wenn } v = \frac{\text{grad } f(x)}{|\text{grad } f(x)|}.$$

Beispiel 3.5 Der Gradient der Funktion $f(x) = \varphi(r)$ mit $r(x) = |x|$ ist nach Beispiel 2.1

$$\text{grad } f(x) = \varphi'(r) \frac{x}{r} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Beispiel 3.6 Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zugehörige Matrix, also $B_{ij} = b(e_i, e_j)$. Es gilt dann, da B symmetrisch,

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten wieder die quadratische Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} b(x, x).$$

Nach Beispiel 3.3 gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = Df(x)v = b(x, v) = \langle Bx, v \rangle.$$

Also ist $\text{grad } f(x) = Bx$.

In Analysis 1 haben wir die Ableitung mit der Existenz der Tangente an den Graphen der Funktion motiviert. Im n -dimensionalen erwarten wir analog die Existenz einer n -dimensionalen Tangentialebene. Eine reellwertige Funktion f auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kann immer als Höhenfunktion einer Landschaft über der Grundfläche Ω interpretiert werden. Betrachte dazu den Graph der Funktion

$$G = \{(y, f(y)) : y \in \Omega\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Wir wollen zeigen, dass der Graph im Punkt $p = (x, f(x))$ eine Tangentialebene hat, wenn f im Punkt x differenzierbar ist. Betrachte dazu für $\lambda > 0$ die Mengen

$$G_{p,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(G - p) = \left\{ \left(\frac{y - x}{\lambda}, \frac{f(y) - f(x)}{\lambda} \right) : y \in \Omega \right\}.$$

Der Graph G wird um $-p$ verschoben, wobei $p = (x, f(x))$ im Nullpunkt landet, dann wird mit dem Faktor $\frac{1}{\lambda}$ gestreckt. Wir wollen die $G_{p,\lambda}$ wieder als Graphen schreiben. Substituieren wir $y = x + \lambda z$, so folgt mit $\Omega_{x,\lambda} = \{z : x + \lambda z \in \Omega\}$

$$G_{p,\lambda} = \{(z, f_{x,\lambda}(z)) : z \in \Omega_{x,\lambda}\} \quad \text{für} \quad f_{x,\lambda}(z) = \frac{f(x + \lambda z) - f(x)}{\lambda}.$$

Da Ω offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Es folgt $B_R(0) \subset \Omega_{x,\lambda}$ für $\lambda < \frac{\varepsilon}{R}$. Für $\lambda > 0$ hinreichend klein ist $f_{x,\lambda}(z)$ also definiert, und es gilt

$$\lim_{\lambda \searrow 0} f_{x,\lambda}(z) = Df(x)z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n.$$

In diesem Sinn konvergieren die reskalierten Graphen $G_{p,\lambda}$ gegen die Menge

$$T_p G = \{(z, Df(x)z) : z \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$T_p G$ ist das Bild der linearen Abbildung $z \mapsto (z, Df(x)z)$, also linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Basis $(e_1, \partial_1 f(x)), \dots, (e_n, \partial_n f(x))$. Einheitsnormale von $T_p G$ ist

$$\nu(p) = \frac{(-\text{grad } f(x), 1)}{\sqrt{1 + |\text{grad } f(x)|^2}} \quad \text{für } p = (x, f(x)).$$

Im Beweis der Differentiationsregeln brauchen wir dass lineare Abbildungen stetig sind. Dazu verwenden wir für $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die folgende Abschätzung mittels Cauchy-Schwarz:

$$(3.7) \quad |Ax| = \left| \sum_{j=1}^n x_j A e_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |A e_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} = |A| |x|.$$

$|A| = \left(\sum_{j=1}^n |A e_j|^2 \right)^{1/2}$ heißt Euklidische Norm von A . Es folgt, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig ist mit Konstante $|A|$, vgl. Analysis 1, Beispiel 7.10:

$$|Ax - Ay| = |A(x - y)| \leq |A| |x - y|.$$

Die optimale, also kleinstmögliche Norm $\|A\|$ mit $|Ax| \leq \|A\| |x|$ für alle x heißt Operatornorm. Für uns reicht die Euklidische Norm aus, die Optimalität spielt keine Rolle. Die Stetigkeit linearer Abbildungen gilt im allgemeinen nicht, wenn statt $\mathbb{R}^n$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum betrachtet wird, man muss sie dann extra voraussetzen.

Satz 3.2 (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0 , so ist f stetig in x_0 .

BEWEIS: Wie soeben besprochen, sind affin-lineare Funktionen stetig auf $\mathbb{R}^n$. Es reicht daher zu zeigen, dass die Funktion $\varphi(x) = f(x) - (f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0))$ stetig in x_0 ist. Aber $\varphi(x_0) = 0$, und nach Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\varphi(x) = |x - x_0| \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \quad \text{mit } x \rightarrow x_0.$$

□

Wir müssen jetzt die Differentiationsregeln erarbeiten.

Satz 3.3 (Kettenregel) Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$. Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) Df(x_0).$$

Für die zugehörigen Jacobimatrizen bedeutet das mit $y_0 = f(x_0)$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \quad \text{für } 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n.$$

BEWEIS: Sei $y_0 = f(x_0)$, $Df(x_0) = A$, $Dg(y_0) = B$. Wir definieren für hinreichend kleine $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\eta \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ die Funktionen

$$\varepsilon_f(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - (f(x_0) + A\xi)}{|\xi|} \quad \text{und} \quad \varepsilon_g(\eta) = \frac{g(y_0 + \eta) - (g(y_0) + B\eta)}{|\eta|}.$$

Mit $\varepsilon_f(0) = 0$ und $\varepsilon_g(0) = 0$ sind beide Funktionen im Nullpunkt stetig. Offensichtliche Kandidatin für die Ableitung von $g \circ f$ in x_0 ist BA , also berechnen wir

$$\begin{aligned}
& \frac{(g \circ f)(x_0 + \xi) - ((g \circ f)(x_0) + BA\xi)}{|\xi|} \\
&= \frac{g(y_0 + A\xi + |\xi|\varepsilon_f(\xi)) - (g(y_0) + BA\xi)}{|\xi|} \\
&= \frac{g(y_0) + B\eta + |\eta|\varepsilon_g(\eta) - (g(y_0) + BA\xi)}{|\xi|} \quad \text{wobei } \eta = A\xi + |\xi|\varepsilon_f(\xi) \\
&= B\varepsilon_f(\xi) + \frac{|\eta|}{|\xi|}\varepsilon_g(\eta).
\end{aligned}$$

Wegen $|B\varepsilon_f(\xi)| \leq |B||\varepsilon_f(\xi)|$ und $|\eta| \leq (|A| + |\varepsilon_f(\xi)|)|\xi| \leq C|\xi|$ konvergiert die rechte Seite wie gewünscht gegen Null. $\square$

Beispiel 3.7 Spezialfall ist die Verkettung $f \circ c$ einer Kurve $c : (a, b) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ist c differenzierbar in $t \in (a, b)$ und f differenzierbar in $c(t)$, so folgt

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t)) \frac{dc_j}{dt}(t),$$

beziehungsweise in vektorieller Form

$$(f \circ c)'(t) = Df(c(t))c'(t) = \langle \text{grad } f(c(t)), c'(t) \rangle.$$

Ist $f \circ c$ konstant, so folgt $\text{grad } f(c(t)) \perp c'(t)$. Anschaulich: der Gradient von f steht senkrecht auf Kurven in der Niveaumenge $\{x \in \Omega : f(x) = \text{const.}\}$, also auf die ganze Niveaumenge. Im Fall $n = 2$ kann man sich die Niveaumenge als Höhenlinie vorstellen.

Wie bei Funktionen einer Variablen kann die Ableitung vektorwertiger Funktionen auf die einzelnen Komponenten zurückgeführt werden.

Satz 3.4 (komponentenweise Differentiation) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn alle Komponenten $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, in x_0 differenzierbar sind.

BEWEIS: Seien $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $A_i \in L(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, m$, mit $(Ax)_i = A_i x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
Df(x_0) = A & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0 \\
& \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_i(x) - (f_i(x_0) + A_i(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m \\
& \Leftrightarrow Df_i(x_0) = A_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Wir haben benutzt dass Konvergenz im $\mathbb{R}^m$ äquivalent ist zur Konvergenz der Komponenten. $\square$

Wir zeigen schließlich die weiteren klassischen Ableitungsregeln.

Satz 3.5 (Ableitungsregeln) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar im Punkt $x \in \Omega$. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Linearität: für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in x differenzierbar mit Ableitung

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

(b) Produktregel: fg ist in x differenzierbar mit Ableitung

$$D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x).$$

(c) Quotientenregel: ist $g(x) \neq 0$, so ist f/g auf einer Umgebung von x definiert und

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}.$$

BEWEIS: Wir setzen $Df(x) = A$, $Dg(x) = B$, und für $h \neq 0$

$$\varepsilon_f(h) = \frac{f(x+h) - (f(x) + Ah)}{|h|}, \quad \varepsilon_g(h) = \frac{g(x+h) - (g(x) + Bh)}{|h|}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\varepsilon_f(h) \rightarrow 0$, $\varepsilon_g(h) \rightarrow 0$ mit $h \rightarrow 0$. Mit der jeweils behaupteten Ableitung ist nun für $h \rightarrow 0$ der Grenzwert in (3.2) nachzuprüfen. Für (a) gilt

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - ((\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha A + \beta B)h)}{|h|} = \alpha \varepsilon_f(h) + \beta \varepsilon_g(h) \rightarrow 0.$$

Für (b) berechnen wir mit etwas mehr Mühe

$$\begin{aligned} & \frac{(fg)(x+h) - ((fg)(x) + (Ag(x) + f(x)B)h)}{|h|} \\ = & \frac{(f(x) + Ah + \varepsilon_f(h)|h|)(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) - (f(x)g(x) + g(x)Ah + f(x)Bh)}{|h|} \\ = & \frac{1}{|h|} (Ah)(Bh) + \varepsilon_f(h)(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) + \varepsilon_g(h)(f(x) + Ah). \end{aligned}$$

Wie in (3.7) bemerkt gilt $|Ah| \leq |A||h|$ sowie $|Bh| \leq |B||h|$, also geht die rechte Seite mit $h \rightarrow 0$ gegen Null. In (c) können wir $m = 1$ und $f \equiv 1$ annehmen, denn sonst schreiben wir $f/g = f(1/g)$ und verwenden (b). Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{Bh}{g(x)^2} \right) \right) \\ = & \frac{1}{|h|} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(g(x) - (g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) + \frac{g(x+h)}{g(x)} Bh \right) \\ = & \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(\left(\frac{g(x+h)}{g(x)} - 1 \right) \frac{Bh}{|h|} - \varepsilon_g(h) \right). \end{aligned}$$

Wegen $g(x) \neq 0$ und $g(x+h) \rightarrow g(x)$ mit $h \rightarrow 0$ nach Satz 3.2 geht die rechte Seite wieder gegen Null mit $h \rightarrow 0$. $\square$

Die Quotientenregel kann auch eleganter mit der Kettenregel gezeigt werden: man verwendet $1/g = h \circ g$ mit $h(y) = \frac{1}{y}$. Für die Produktregel gibt es ein ähnliches Argument: es ist $fg = h \circ \phi$ mit $\phi(x) = (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$ und $h(y_1, y_2) = y_1 y_2$. Nach Satz 3.4 ist ϕ

differenzierbar, und h nach Beispiel 3.3.

Wie besprochen kann aus der Existenz der partiellen Ableitungen nicht auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden, ja nicht einmal auf die Stetigkeit. Das ist schade, denn die partiellen Ableitungen sind so schön einfach auszurechnen, während die Definition 3.1 eventuell schwierig zu verifizieren ist. Zum Glück können wir aber doch die partiellen Ableitungen einsetzen.

Satz 3.6 (stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ differenzierbar) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar. Sind die Funktionen $\partial_j f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x \in \Omega$ stetig, so ist f in x (total) differenzierbar.*

BEWEIS: Wegen Satz 3.4 können wir annehmen dass f reellwertig ist, also $m = 1$. Nach Satz 3.1 muss die Ableitung durch die partiellen Ableitungen gegeben sein, also

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Ah = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) h_k.$$

Wir wollen den Mittelwertsatz verwenden. Da wir nur in Richtung der Achsen differenzieren können, gehen wir von x nach $x + h$ längs der Kanten des Quaders, das heißt wir betrachten $p_k = x + \sum_{i=1}^k h_i e_i$ mit $k = 0, \dots, n$. Es gilt für geeignete $s_k \in [0, 1]$

$$f(p_k) - f(p_{k-1}) = f(p_{k-1} + h_k e_k) - f(p_{k-1}) = \partial_k f(p_{k-1} + s_k h_k e_k) h_k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+h) - (f(x) + Ah)|}{|h|} &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{k=1}^n (f(p_k) - f(p_{k-1}) - \partial_k f(x) h_k) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \sum_{k=1}^n \left(\partial_k f(p_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x) \right) h_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \partial_k f \left(x + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + s_k h_k e_k \right) - \partial_k f(x) \right|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht mit $h \rightarrow 0$ gegen Null, da die $\partial_k f$ im Punkt x stetig sind. $\square$

Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht stetig differenzierbar sind. In Analysis 1, Serie 13, Aufgabe 4 hatten wir das Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aber hier gilt: Ausnahmen bestätigen die Regel, in den meisten Fällen ist Satz 3.6 das Mittel der Wahl, um die Differenzierbarkeit einer Funktion zu begründen. Dabei ist hilfreich, dass die Ableitungsregeln auch in der Klasse der C^k -Funktionen gelten.

Folgerung 3.1 Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

- (a) Mit $f, g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt $\alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (b) Aus $f, g \in C^k(\Omega)$ folgt $fg \in C^k(\Omega)$, sowie $f/g \in C^k(\Omega)$ falls $g \neq 0$ auf Ω .
- (c) Sind $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $g \in C^k(V, \mathbb{R}^p)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$, so ist $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$.

BEWEIS: Im Fall $k = 0$ sind die Aussagen wohlbekannt. Die Behauptungen (a) und (b) folgen nun aus den Rechenregeln für die partielle Ableitung, siehe Satz 2.1, mit Induktion über k . Sind zum Beispiel $f, g \in C^k(\Omega)$ für ein $k \geq 1$, so gilt induktiv $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in C^{k-1}(\Omega)$, also $fg \in C^k(\Omega)$.

Für $k \geq 1$ sind die Abbildungen f und g aus (c) differenzierbar nach Satz 3.6. Dann ist $g \circ f$ ebenfalls differenzierbar wegen der Kettenregel, Satz 3.3, mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \circ f \frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

Nun sind $\partial_k f_j \in C^{k-1}(U)$, $\partial_j g_i \in C^{k-1}(V)$ nach Voraussetzung, also $\partial_j g_i \circ f \in C^{k-1}(U)$ nach Induktion. Es folgt $\partial_k(g \circ f)_i \in C^{k-1}(U)$ mit der Produktregel aus (b), also ist $g \circ f$ von der Klasse C^k . □

4 Erste Anwendungen

Eine typische Aufgabe der Analysis ist es, Eigenschaften einer Funktion aus Informationen über ihre Ableitung zu gewinnen. Für Funktionen einer Variablen, also $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, stehen dazu zwei Argumente zur Verfügung:

a) der Mittelwertsatz (Analysis 1, Kapitel 10):

$$f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) \quad \text{für ein } \tau \in (a, b);$$

b) der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Analysis 1, Kapitel 14):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Ein gewisser Nachteil des Mittelwertsatzes besteht darin, dass die Zwischenstelle $\tau \in (a, b)$ im allgemeinen nicht eindeutig ist. Hängt die Funktion f von weiteren Variablen ab, so gilt das auch für die Zwischenstelle, aber es gibt keine Kontrolle dieser Abhängigkeit.

Im folgenden verwenden wir meistens den Hauptsatz, wobei dann $f(t)$ eine C^1 -Funktion sein sollte. Genauer reicht es wenn $f(t)$ stetig auf $[a, b]$ und stückweise C^1 ist. Denn sei $a = t_0 < \dots < t_N = b$ eine Unterteilung, so dass f' auf den offenen Teilintervallen (t_{i-1}, t_i) stetig ist und in den Randpunkten einseitige Grenzwerte $f'_\pm(t_i)$ hat. Dann gilt

$$(4.1) \quad f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^N (f(t_k) - f(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t) dt = \int_a^b f'(t) dt.$$

Wie kann das eindimensionale Argument nun für Funktionen mehrerer Variabler $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eingesetzt werden? Die einfache Antwort: indem f längs Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, $\gamma = \gamma(t)$, ausgewertet wird.

Lemma 4.1 Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \Omega$ stetig und stückweise C^1 . Dann gilt für $f \in C^1(\Omega)$

$$(4.2) \quad f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

BEWEIS: Nach Folgerung 3.1 ist $f \circ \gamma$ stückweise C^1 , also folgt aus (4.1) und der Kettenregel

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_a^b Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

□

Eine direkte Anwendung ist der

Satz 4.1 (Konstanzsatz) Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so gilt

$$Df(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konstant.}$$

BEWEIS: Zu $x \in \Omega$ wähle $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(x) \subset \Omega$. Zu $y \in B_\varrho(x)$ betrachte $\gamma : [0, 1] \rightarrow B_\varrho(x)$, $\gamma(t) = x + t(y - x)$. Mit Lemma 4.1 folgt

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 Df(\gamma(t))\gamma'(t) dt = 0.$$

Also ist f lokal konstant, und dann nach Lemma 1.2 konstant. $\square$

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so lassen sich je zwei Punkte $x, y \in \Omega$ durch einen stetigen Weg in Ω verbinden, das ist sogar eine äquivalente Charakterisierung des Zusammenhangs. Wir wollen das aber nicht vertiefen, sondern es geht als nächstes um Aussagen zum Wachstum von Funktionen. Dazu reicht die Tatsache der Existenz von Verbindungen nicht, eine quantitative Kontrolle ist notwendig. Der häufigste und einfachste Fall ist, wenn wir die gerade Strecke nehmen können.

Definition 4.1 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls folgende Implikation gilt:

$$x_0, x_1 \in M \quad \Rightarrow \quad (1-t)x_0 + tx_1 \in M \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Satz 4.2 (Schränkensatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $f \in C^1(\Omega)$. Es gebe ein $L < \infty$ mit $|Df(x)| \leq L$ für alle $x \in \Omega$. Dann folgt

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq L|x_1 - x_0| \quad \text{für alle } x_0, x_1 \in \Omega.$$

BEWEIS: Sei $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ für $0 \leq t \leq 1$. Aus (4.2) und (3.7) folgt, da $\gamma'(t) = x_1 - x_0$,

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 Df(\gamma(t))(x_1 - x_0) dt \right| \leq \int_0^1 |Df(\gamma(t))(x_1 - x_0)| dt \leq L|x_1 - x_0|.$$

$\square$

Die folgende lokale Variante des Schränkensatzes ist ebenfalls oft nützlich.

Folgerung 4.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ eine Konstante $L < \infty$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

BEWEIS: Angenommen nicht, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Punkte $x_k, y_k \in K$ mit

$$|f(x_k) - f(y_k)| > k|x_k - y_k| \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

Da f stetig auf der kompakten Menge K ist, gibt es ein $M < \infty$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in K$ nach Satz 1.8. Es folgt

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} |f(x_k) - f(y_k)| \leq \frac{2M}{k} \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Wähle nun eine Teilfolge $x_{k_j} \rightarrow x \in K$, also auch $y_{k_j} \rightarrow x$ mit $j \rightarrow \infty$. Sei $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Da Df stetig ist, gibt es wieder nach Satz 1.8 ein $L < \infty$ mit

$$|Df(y)| \leq L \quad \text{für alle } y \in \overline{B_r(x)}.$$

Für j gross gilt $x_{k_j}, y_{k_j} \in B_r(x)$, also liefert der Schrankensatz

$$k_j |x_{k_j} - y_{k_j}| < |f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \leq L |x_{k_j} - y_{k_j}|,$$

ein Widerspruch für j hinreichend groß. □

Als nächstes beschäftigen wir uns mit Extremwerten, und verallgemeinern die notwendigen und hinreichenden Kriterien aus Analysis 1. Dabei spielt die zweite Ableitung eine entscheidende Rolle. Wir behandeln im Anschluss Grundtatsachen über konvexe Funktionen. Als bekannt setzen wir voraus: auf einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ nimmt eine stetige Funktion ihre Extremwerte an.

Definition 4.2 Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, hat in $x \in M$ ein lokales Minimum, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(y) \geq f(x) \quad \text{für alle } y \in B_\delta(x) \cap M.$$

Ist sogar $f(y) > f(x)$ für $y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$, so heißt das Minimum isoliert. Ein (isoliertes) lokales Maximum ist entsprechend definiert.

Satz 4.3 (notwendige Bedingung für Extrema) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ habe in $x \in \Omega$ ein lokales Extremum. Ist f differenzierbar in x , so folgt $Df(x) = 0$.

BEWEIS: Für $v \in \mathbb{R}^n$ hat die Funktion $t \mapsto f(x + tv)$ ein lokales Extremum bei $t = 0$, also folgt aus der eindimensionalen Version und Satz 3.1

$$0 = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = Df(x)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

□

Definition 4.3 Ein Punkt $x \in \Omega$ mit $Df(x) = 0$ heißt kritischer Punkt von f .

Kritische Punkte sind damit Kandidaten für Extremalstellen. Es gibt aber kritische Punkte, in denen weder ein Maximum noch ein Minimum vorliegt, das zeigt schon das eindimensionale Beispiel $f(x) = x^3$ im Punkt $x = 0$. Um die Situation genauer zu analysieren brauchen wir die zweite Ableitung.

Definition 4.4 Sei $f \in C^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zweite Ableitung von f im Punkt $x \in \Omega$ ist die Bilinearform

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad D^2 f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i w_j.$$

Die Matrix $(\partial_{ij}^2 f(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt Hessematrix von f an der Stelle x , und als Hesseform bezeichnet man die zugehörige quadratische Form

$$v \mapsto D^2 f(x)(v, v) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i v_j.$$

Die Hessematrix ist symmetrisch, und $D^2f(x)$ ist symmetrische Bilinearform. Denn nach Schwarz, Satz 2.2, gilt $\partial_{ij}^2 f = \partial_{ji}^2 f$ für $f \in C^2(\Omega)$, und daraus folgt

$$D^2f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i w_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ji}^2 f(x) w_j v_i = D^2f(x)(w, v).$$

Als erstes wollen wir die Formel für die zweite Ableitung längs Kurven herleiten.

Lemma 4.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$ und $\gamma \in C^2(I, \Omega)$. Dann gilt

$$(4.3) \quad (f \circ \gamma)''(t) = D^2f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) + Df(\gamma(t))\gamma''(t).$$

BEWEIS: Nach Kettenregel ist $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j'(t)$, und weiter

$$(f \circ \gamma)''(t) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \gamma_j'(t) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j''(t).$$

□

Wir benötigen nun eine lokale Entwicklung, die die zweite Ableitung mit einbezieht.

Lemma 4.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\frac{f(x+h) - (f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h, h))}{|h|^2} \rightarrow 0 \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

BEWEIS: Setze $\gamma(t) = x + th$, das heißt nach Lemma 4.2 gilt

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(x + th)h \quad \text{und} \quad (f \circ \gamma)''(t) = D^2f(x + th)(h, h).$$

Wir berechnen mit dem Hauptsatz und partieller Integration

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(1) &= (f \circ \gamma)(0) + \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(0) + (f \circ \gamma)'(0) + \int_0^1 (1-t)(f \circ \gamma)''(t) dt. \end{aligned}$$

Einsetzen von $\gamma(t) = x + th$ liefert

$$(4.4) \quad f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h, h) + \int_0^1 (1-t)(D^2f(x+th) - D^2f(x))(h, h) dt.$$

Wir schätzen den Integranden ab. Nach Cauchy-Schwarz gilt für $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n Q_{ij} h_i h_j \right| = \left| \sum_{i=1}^n (Qh)_i h_i \right| = |\langle Qh, h \rangle| \leq |Qh| |h| \leq |Q| |h|^2.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|D^2f(y) - D^2f(x)| < \varepsilon$ für $|y - x| < \delta$. Es folgt

$$|(D^2f(x+th) - D^2f(x))(h, h)| \leq \varepsilon |h|^2 \quad \text{für } |h| < \delta.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Als zweites Hilfsmittel brauchen wir folgende Tatsache über quadratische Formen.

Satz 4.4 (Grundzustand) Sei $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform auf dem n -dimensionalen Euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, und

$$\lambda = \inf\{b(x, x) : \|x\| = 1\}.$$

Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ so dass $b(v, v) = \lambda$.

BEWEIS: Wir zeigen die Aussage erst im Fall $V = \mathbb{R}^n$, mit dem Standardskalarprodukt. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b(x, x)$, ist stetig auf $\mathbb{R}^n$, denn es gilt

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j \quad \text{wobei } b_{ij} = b(e_i, e_j).$$

Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist kompakt, also wird das Infimum durch ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ angenommen. Den allgemeinen Fall führen wir auf $\mathbb{R}^n$ zurück, indem wir in V mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ wählen². Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze $x_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, und betrachte die symmetrische Bilinearform

$$b_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_{\mathcal{B}}(x, y) = b(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}).$$

Wegen $\|x_{\mathcal{B}}\| = |x|$ folgt mit Substitution

$$\inf\{b(v, v) : \|v\| = 1\} = \inf\{b_{\mathcal{B}}(x, x) : |x| = 1\}.$$

Das Infimum wird rechts in einem Punkt x angenommen, also links im Punkt $v = x_{\mathcal{B}}$. □

Definition 4.5 Eine symmetrische Bilinearform $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *positiv definit* (bzw. *positiv semidefinit*), falls gilt:

$$b(v, v) > 0 \quad (\text{bzw. } b(v, v) \geq 0) \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{0\}.$$

Notation: $b > 0$ bzw. $b \geq 0$. Entsprechend für negativ (semi-)definit.

Beachten Sie, dass *definit* die strikte Ungleichung bedeutet, anders als zum Beispiel bei der Monotonie von Funktionen, wo wir zum Ausschluss der Gleichheit den Begriff *streng monoton* verwenden. Wir bemerken auch, dass es sich nur um eine teilweise Ordnung handelt, es muss nicht einer der Fälle $b \geq 0$ oder $b \leq 0$ gelten. Für $b(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ auf $\mathbb{R}^2$ gilt zum Beispiel $b(e_1, e_1) > 0$, aber $b(e_2, e_2) < 0$.

Satz 4.5 (Lokale Extrema) Sei $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$.

- (a) Wenn f in x ein lokales Minimum hat, so ist $D^2 f(x)$ positiv semidefinit.
- (b) Ist $Df(x) = 0$ und $D^2 f(x)$ positiv definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Minimum.

BEWEIS: In (a) gilt $Df(x) = 0$ nach Satz 4.3. Für $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig hat $t \mapsto f(x + tv)$ bei $t = 0$ ein lokales Minimum, also folgt aus dem eindimensionalen Fall und (4.3)

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(x + tv)|_{t=0} = D^2 f(x)(v, v).$$

²E. Kuwert: Mathematik für Ingenieure II, SS 2025, Satz 7.1

Für (b) verwende (4.4): zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2}D^2f(x)(h,h) + R(h) \quad \text{mit } |R(h)| < \varepsilon|h|^2 \text{ für } |h| < \delta.$$

Nach Voraussetzung ist $D^2f(x)(h,h) > 0$ für $h \neq 0$, wir brauchen aber hier eine quantitative Version. Nach Satz 4.4 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, mit

$$\lambda := \inf_{|w|=1} D^2f(x)(w,w) = D^2f(x)(v,v) > 0.$$

Wir wählen $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$. Mit dem zugehörigen $\delta > 0$ gilt

$$f(x+h) - f(x) \geq \frac{\lambda}{2}|h|^2 - \varepsilon|h|^2 = \left(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon\right)|h|^2 > 0 \text{ für } 0 < |h| < \delta.$$

□

Um die Funktion in der Nähe eines kritischen Punkts zu verstehen, ist der folgende Satz aus der Linearen Algebra nützlich.

Satz 4.6 (Hauptachsentransformation) Sei $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform auf dem Euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ und $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, so dass gilt:

$$b(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

BEWEIS: Setze $\lambda = \inf\{b(x,x) : \|x\| = 1\}$ und wähle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $b(v,v) = \lambda$, siehe Satz 4.4. Wir behaupten

$$(4.5) \quad b(v, w) = \lambda \langle v, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V.$$

Die Gleichung stimmt für $w = v$, und die Menge der $w \in V$ mit (4.5) ist ein Unterraum. Es reicht daher, die Gleichung für $w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ und $|w| = 1$ zu zeigen. Dann ist $\|(\cos t)v + (\sin t)w\|^2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und aus der Minimumeigenschaft folgt wie behauptet

$$b(v, w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b((\cos t)v + (\sin t)w, (\cos t)v + (\sin t)w)|_{t=0} = 0 = \lambda \langle v, w \rangle.$$

Jetzt konstruieren wir induktiv $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ und $v_1, \dots, v_n$ orthonormal mit

$$b(v_i, w) = \lambda_i \langle v_i, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V.$$

Mit $w = v_j$ ist das die Behauptung des Satzes. Für $k = 1$ nehmen wir $\lambda_1 = \lambda$ und $v_1 = v$ wie oben. Seien nun $v_1, \dots, v_k$ und $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ schon bestimmt für $1 \leq k \leq n-1$. Setze

$$\lambda_{k+1} = \inf\{b(x,x) : x \in V_k, \|x\| = 1\} \quad \text{mit } V_k = \{v_1, \dots, v_k\}^\perp.$$

Es gilt $V_{k+1} \subset V_k$ und damit $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$. Nach Satz 4.4, angewandt im Raum $V = V_k$, gibt es ein $v_{k+1} \in V_k$ mit $\|v_{k+1}\| = 1$ und $b(v_{k+1}, v_{k+1}) = \lambda_{k+1}$. Aus (4.5) folgt

$$b(v_{k+1}, w) = \lambda_{k+1} \langle v_{k+1}, w \rangle \quad \text{für alle } w \in V_k.$$

Aber da b symmetrisch, gilt induktiv für $1 \leq i \leq k$

$$b(v_{k+1}, v_i) = b(v_i, v_{k+1}) = \lambda_i \langle v_i, v_{k+1} \rangle = 0 = \lambda_{k+1} \langle v_{k+1}, v_i \rangle.$$

Es folgt $b(v_{k+1}, w) = \lambda_{k+1} \langle v_k, w \rangle$ für alle $w \in V$, der Induktionsschluss. $\square$

Jede lineare Abbildung $B : V \rightarrow V$ induziert die Bilinearform

$$b(v, w) = \langle Bv, w \rangle \quad \text{für } v, w \in V.$$

B heißt symmetrisch, wenn b symmetrisch ist. Wegen $b(v, w) - \lambda \langle v, w \rangle = \langle Bv - \lambda v, w \rangle$ ist die Gleichung (4.5) gleichbedeutend mit

$$Bv = \lambda v,$$

das heißt v ist Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Satz 4.6 besagt: symmetrische Endomorphismen sind diagonalisierbar, genauer gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Die Hauptachsentransformation hat eine unendlichdimensionale Verallgemeinerung, den Spektralsatz, der zum Beispiel in der Quantenmechanik von Bedeutung ist. Der zugrundeliegende Vektorraum ist dort ein Raum von Funktionen, welche die möglichen Zustände eines quantenmechanischen Systems beschreiben. Anstelle des Endomorphismus B tritt der Differentialoperator $H = -\Delta + V$, der sogenannte Hamiltonoperator. Die Eigenfunktion von H zum kleinsten Eigenwert heißt Grundzustand, die weiteren Eigenfunktionen sind die angeregten Zustände. Das Quadratintegral der Zustände wird auf Eins normiert, es hat die Interpretation als Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Eine ähnliche Situation, ebenfalls mit Grund- und Obertönen, hat man bei den Schwingungen einer Saite.

In den Koordinaten $x = x_1 v_1 + \dots x_n v_n$ bezüglich der Eigenvektorbasis von b hat die quadratische Form die Darstellung

$$b(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{mit } \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Für $n = 2$ wollen wir die Mengen $M_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : b(x, x) = c\}$ beschreiben; dabei können wir nach Übergang zu $-b$ annehmen, dass $\lambda_2 > 0$ ist. Es ergeben sich drei Fälle:

$\lambda_1 > 0$: Im Nullpunkt hat $b(x, x)$ ein globales, isoliertes Minimum und für $c > 0$ ist M_c eine achsensymmetrische Ellipse mit Scheiteln in $(\pm \sqrt{c/\lambda_1}, 0)$ und $(0, \pm \sqrt{c/\lambda_2})$.

$\lambda_1 = 0$: Auch hier ist im Nullpunkt ein globales Minimum, allerdings ist M_0 die gesamte x_1 -Achse; für $c > 0$ besteht M_c aus den parallelen Geraden $x_2 = \pm \sqrt{c/\lambda_2}$.

$\lambda_1 < 0$: M_0 ist Vereinigung der beiden Ursprungsgeraden $x_2 = \pm \sqrt{-\lambda_1/\lambda_2} x_1$. Für $c > 0$ ist M_c eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheiteln $(0, \pm \sqrt{c/\lambda_2})$ und M_0 als Asymptotenlinien. Für $c < 0$ erhalten wir ebenfalls eine Hyperbel mit Asymptoten M_0 , die aber nach links und rechts geöffnet ist und die Scheitel $(\pm \sqrt{c/\lambda_1}, 0)$ hat.

Betrachten wir in den drei Fällen die zugehörigen Graphen im $\mathbb{R}^3$, so haben wir für $\lambda_1 > 0$ anschaulich eine Mulde, für $\lambda_1 = 0$ einen Hohlweg und für $\lambda_1 < 0$ einen Sattel. Aus

der Mulde wird für $-b$ eine Kuppe. Ein kritischer Punkt x einer Funktion f heißt nicht degeneriert, wenn die Eigenwerte λ_i von $D^2f(x)$ alle ungleich Null sind. In diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der negativen Eigenwerte als den Index des kritischen Punkts. Für $f(x) = b(x, x)$ sind die drei Fälle oben der Reihe nach Index Null, degeneriert und Index Eins, die Kuppe ist Index zwei.

Definition 4.6 (konvexe Funktion) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Dann heißt $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, falls für alle $x, y \in K$ gilt:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

f heißt strikt konvex, falls die strikte Ungleichung gilt für $x \neq y$ und $t \in (0, 1)$.

Wie man leicht sieht, ist Konvexität von f äquivalent dazu, dass der Epigraph

$$G^+(f) = \{(x, z) \in K \times \mathbb{R} : z \geq f(x)\}$$

eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist.

Satz 4.7 (Konvexitätskriterien) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $f \in C^1(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) f ist konvex.
- (b) $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y - x)$ für alle $x, y \in \Omega$.
- (c) $(Df(y) - Df(x))(y - x) \geq 0$ für alle $x, y \in \Omega$.

Ist sogar $f \in C^2(\Omega)$, so ist außerdem äquivalent:

- (d) $D^2f(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$.

BEWEIS: Die Aussage wird jeweils auf den eindimensionalen Fall reduziert, indem wir für $x, y \in \Omega$ die Funktion $\varphi(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)$ betrachten. Unter Voraussetzung (a) ist $\varphi(0) = 0$ ein Minimum, daraus folgt (b):

$$0 \leq \varphi'(0) = f(y) - f(x) - Df(x)(y - x).$$

Aussage (c) folgt aus (b) durch Vertauschen von x und y und Addition. Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) zeigen wir durch Widerspruch. Angenommen $\varphi(t)$ hat in $\tau \in (0, 1)$ ein Minimum $\varphi(\tau) < 0$. Für $t_1 < t_2$ gilt nach (c) mit $x(t) = (1-t)x + ty$

$$\begin{aligned} \varphi'(t_1) - \varphi'(t_2) &= (Df(x(t_2)) - Df(x(t_1)))(y - x) \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} (Df(x(t_2)) - Df(x(t_1)))(x(t_2) - x(t_1)) \geq 0. \end{aligned}$$

Für $t < \tau$ folgt $\varphi'(t) \geq \varphi'(\tau) = 0$, und hieraus $\varphi(0) \leq \varphi(\tau) < 0$, ein Widerspruch.

Sei nun $f \in C^2(\Omega)$. Nach (4.4) wissen wir

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)h + \int_0^1 (1-t)D^2f(x + th)(h, h) dt.$$

Mit $h = y - x$ folgt die Implikation (d) $\Rightarrow$ (b). Umgekehrt folgt (d) aus (b) mit Satz 4.5, denn die Funktion $g(y) = f(y) - (f(x) + Df(x)(y - x))$ hat in x ein Minimum. $\square$

Eine Funktion f mit $f((1 - t)x + ty) \geq (1 - t)f(x) + tf(y)$ für alle $x, y \in \Omega$, $t \in [0, 1]$, heißt konvex und es gelten entsprechende Aussagen mit umgekehrten Ungleichungen.

5 Das Taylorpolynom

Das Thema in diesem Kapitel ist die Taylorentwicklung, und zwar erst im Fall einer Variablen und im Anschluss auch im $\mathbb{R}^n$. Es geht dabei um den Vergleich einer gegebenen Funktion $f(x)$ mit einem Polynom $P(x)$, das in einer Stelle x_0 „von k -ter Ordnung“ mit f übereinstimmt, also $f^{(i)}(x_0) = P^{(i)}(x_0)$ für $i = 0, 1, \dots, k$. $P(x)$ sollte dann $f(x)$ asymptotisch für $x \rightarrow x_0$ gut approximieren, und das will quantifiziert werden. Für $k = 0, 1, 2$, also konstante, lineare sowie quadratische Polynome, haben wir das schon gesehen.

Zur Erinnerung: eine Funktion $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$, wenn es $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_k \neq 0$, so dass gilt:

$$P(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathbb{P}_k$ der Polynome vom Grad $\leq k$ der durch $1, x, \dots, x^k$ erzeugte Unterraum. Es gilt: für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ bilden die Funktionen $1, x - x_0, \dots, (x - x_0)^k$ eine Basis von $\mathbb{P}_k$. Wegen $\dim \mathbb{P}_k \leq k + 1$ müssen wir dazu nur die lineare Unabhängigkeit zeigen. Wir verwenden die Ableitungsregel

$$(5.1) \quad P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - x_0)^j \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d}{dx} \right)^i P(x)|_{x=x_0} = i! a_i.$$

Ist $P(x)$ die Nullfunktion, so folgt $a_i = 0$ für $i = 0, \dots, k$ wie behauptet.

Lemma 5.1 Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Zu $f \in C^k(I)$ gibt es genau ein Polynom $P \in \mathbb{P}_k$ mit $P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ für $i = 0, 1, \dots, k$, und zwar

$$(5.2) \quad P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

P_k heißt Taylorpolynom der Ordnung k von f mit Entwicklungspunkt x_0 .

BEWEIS: Für das in (5.2) definierte Polynom gilt $P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ für $i = 0, \dots, k$, wie man mit (5.1) sieht. Zur Eindeutigkeit sei $P \in \mathbb{P}_k$ mit $P^{(i)}(x_0) = 0$ für alle $i = 0, \dots, k$. Wie oben gezeigt gilt eine Darstellung $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x - x_0)^j$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit (5.1) folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, \dots, k$. $\square$

Folgerung 5.1 Das k -te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.

In der Situation von Lemma 5.1 heißt die Funktion

$$(5.3) \quad R_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

das Restglied k -ter Ordnung der Taylorentwicklung in x_0 . Knackpunkt bei der Taylorentwicklung ist die Abschätzung dieses Restglieds und damit eine Aussage darüber, wie gut die Funktion durch das Taylorpolynom approximiert wird. Hierfür gibt es verschiedene mögliche Darstellungen von R_k .

Satz 5.1 (Integraldarstellung des Restglieds) Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$ das k -te Taylorpolynom im Punkt $x_0 \in I$. Dann gilt

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x) \quad \text{mit} \quad R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy.$$

BEWEIS: Durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k = 0$ folgt aus dem Hauptsatz

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(y) dy.$$

Für $k \geq 1$ folgt induktiv mit partieller Integration, vgl. Lemma 4.3 für den Fall $k = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x (x - y)^{k-1} f^{(k)}(y) dy \\ &= P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \left(\left[-\frac{(x-y)^k}{k} f^{(k)}(y) \right]_{y=x_0}^{y=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x-y)^k}{k} f^{(k+1)}(y) dy \right) \\ &= P_k(x) + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy. \end{aligned}$$

□

Die zweite Darstellung des Restglieds ist vielleicht etwas populärer.

Satz 5.2 (Lagangedarstellung des Restglieds) Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu $x_0, x \in I$ ein ξ zwischen x_0 und x , so dass gilt:

$$(5.4) \quad f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + R_k(x) \quad \text{mit} \quad R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

BEWEIS: Wir verwenden den Mittelwertsatz der Integralrechnung mit Gewicht, siehe Folgerung 13.2, Analysis 1: ist $\varphi \in C^0(I)$ mit $\varphi \geq 0$, so gibt es zu $f \in C^0(I)$ ein $\xi \in I$ mit

$$\int_I f \varphi = f(\xi) \int_I \varphi.$$

Sei nun $x > x_0$. Dann können wir $I = [x_0, x]$ und $\varphi(y) = (x - y)^k$ wählen. Es folgt

$$\frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x - y)^k f^{(k+1)}(y) dy = \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x - y)^k dy = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1},$$

für ein $\xi \in [x_0, x]$. Der Fall $x < x_0$ ist analog, der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 5.1 Betrachte für $x \in (-1, 1)$ die Funktion $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$, mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1 - x)^{-5/2}.$$

Es gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1/2$, also lautet das Taylorpolynom der Ordnung Eins in $x_0 = 0$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = \frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2}x^2 \quad \text{für ein } \xi \in [0, x].$$

Als Anwendung erhalten wir für die relativistische Energie eines Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v , wenn wir $\beta = v/c$ setzen,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2}\beta^4\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \Delta E.$$

Dabei ist der erste Term die Ruheenergie und der zweite die klassische kinetische Energie. Für den relativistischen Korrekturterm ergibt sich aus der Restglieddarstellung die Abschätzung

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi)\beta^2 \leq f''(\beta^2)\beta^2 < 0,008 \quad \text{für } \beta \leq 0,1.$$

Bei Geschwindigkeiten $v \leq \frac{1}{10}c$ beträgt die relativistische Korrektur weniger als ein Prozent der klassischen kinetischen Energie.

Um das asymptotische Verhalten von Funktionen zu vergleichen, werden oft die Landauschen Symbole $\mathcal{O}$ und o benutzt. Seien f, g zwei Funktionen, die für $0 < |x - x_0| < \delta$ definiert sind, und es sei $g(x) \neq 0$ für x nahe bei x_0 . Dann schreibt man

$$\begin{aligned} f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0, \\ f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 &\Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty. \end{aligned}$$

In Worten: die Funktion $f(x)$ ist klein- o von $g(x)$ beziehungsweise groß- $\mathcal{O}$ von $g(x)$ für $x \rightarrow x_0$. Diese Begriffe sind analog für Grenzwerte $|x| \rightarrow \infty$ usw. erklärt. Wir zeigen jetzt, dass sich $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ asymptotisch wie das k -te Taylorpolynom $P_k(x)$ verhält, bis auf einen Term der von der Ordnung k verschwindet:

$$f(x) = P_k(x) + o(|x - x_0|^k) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Satz 5.3 (Approximation durch das Taylorpolynom) Sei $f \in C^k(I)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k -te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in I$. Dann ist P_k das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens k mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

BEWEIS: Nach Satz 5.2 gibt es zu $x \in I$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$\frac{f(x) - P_k(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{f(x) - P_{k-1}(x)}{(x - x_0)^k} - \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) = \frac{1}{k!}(f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)).$$

Da $f^{(k)}$ stetig, ist $|f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$, womit die Konvergenz gegen Null bewiesen ist. Für die Eindeutigkeit ist zu zeigen, dass für $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j(x - x_0)^j$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{(x - x_0)^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \dots = a_k = 0.$$

Sei induktiv schon $a_0 = \dots = a_{j-1} = 0$ gezeigt mit $0 \leq j \leq k$. Dann folgt

$$a_j = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{-j} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{k-j} (x - x_0)^{-k} P(x) = 0.$$

□

Die mehrdimensionale Taylorentwicklung orientiert sich am Fall $n = 1$, nur ist der Notationsaufwand größer. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Für $f \in C^k(\Omega)$ definieren wir die k -te Ableitung $D^k f(x)$ im Punkt $x \in \Omega$ als k -Linearform $D^k f(x) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$(5.5) \quad D^k f(x)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (\partial_{i_1 \dots i_k}^k f)(x)(v_1)_{i_1} \dots (v_k)_{i_k}.$$

Betrachte jetzt für $x_0, x \in \Omega$ die C^k -Funktion, vgl. Folgerung 3.1,

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = f(x_0 + th) \quad \text{mit } h = x - x_0.$$

Wir zeigen durch Induktion die Formel

$$(5.6) \quad \varphi^{(k)}(t) = D^k f(x_0 + th)(h, \dots, h).$$

Für $k = 1$ gilt das nach Kettenregel und Satz 3.1, denn

$$\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0 + th)h_i.$$

Für $k \geq 2$ ergibt sich induktiv mit Satz 2.2 von Schwarz

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n (\partial_{i_1 \dots i_{k-1}}^{k-1} f)(x_0 + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \sum_{i=1}^n (\partial_{i_1 \dots i_{k-1} i}^k f)(x_0 + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} h_i \\ &= D^k f(x_0 + th)(h, \dots, h). \end{aligned}$$

Satz 5.2, angewandt auf die Funktion φ , liefert sofort eine erste Fassung der mehrdimensionalen Taylorentwicklung.

Lemma 5.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu $x_0, x \in \Omega$ ein $\xi = (1 - \tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0, 1]$, so dass mit $h = x - x_0$ gilt:

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{D^j f(x_0)(h, \dots, h)}{j!} + \frac{D^{k+1} f(\xi)(h, \dots, h)}{(k+1)!}.$$

BEWEIS: Wir wenden auf die C^{k+1} -Funktion $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ die eindimensionale Taylorsche Formel an, mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$. Nach Satz 5.2 gibt es ein $\tau \in [0, 1]$ mit

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}.$$

Einsetzen von (5.6) liefert die Behauptung. $\square$

Die k -te Ableitung $D^k f(x)(h, \dots, h)$ ist eine Summe von n^k Termen, von denen viele aber gleich sind wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Es ist ökonomischer, die Summe danach zu ordnen, wie oft nach den einzelnen Variablen $x_1, \dots, x_n$ differenziert wird. Gleichzeitig führt das wie im Eindimensionalen auf eine Taylordarstellung mit Basispolynomen. Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n && \text{Ordnung von } \alpha, \\ \alpha! &= (\alpha_1)! \cdot \dots \cdot (\alpha_n)! && \alpha\text{-Fakultät}, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} && \text{Monom mit Exponent } \alpha, \\ D^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \quad (D^0 = \text{Id}). \end{aligned}$$

Im Operator D^α wird also α_i mal nach x_i differenziert.

Satz 5.4 (Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu $x_0, x \in \Omega$ ein $\xi = (1 - \tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0, 1]$, so dass gilt:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

BEWEIS: Sei α Multiindex der Ordnung $|\alpha| = k$. Wieviele Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ gibt es, in denen jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ genau α_i mal vorkommt? Wähle α_1 Stellen für $i = 1$, aus den übrigen α_2 Stellen für $i = 2$, etc. Das ergibt die Zahl

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \binom{k - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{k!}{(\alpha_1)! \dots (\alpha_n)!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Die behauptete Entwicklung folgt nun aus Lemma 5.2 und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, siehe Folgerung 2.1. $\square$

Sei $I(n, k)$ die Menge aller n -Multiindizes mit $|\alpha| = k$. Es gilt dann

$$I(n+1, k) = \bigcup_{\ell=0}^k \{(\alpha, \ell) : \alpha \in I(n, k - \ell)\}.$$

Also gilt $\#I(n+1, k) = \sum_{\ell=0}^k \#I(n, k - \ell)$, und induktiv folgt leicht $\#I(n, k) \leq (k+1)^{n-1}$. Für große k ist das viel kleiner als die Zahl n^k aus der vorigen Darstellung der Taylorformel.

Eine Funktion $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $k \geq 0$, wenn es $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq k$, gibt mit $a_\alpha \neq 0$ für mindestens ein $|\alpha| = k$, so dass gilt:

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig bilden die Monome $(x - x_0)^\alpha$ mit $0 \leq |\alpha| \leq k$ eine Basis des Raums $\mathbb{P}_k$ der Polynome vom Grad $\leq k$. Dies folgt wie für $n = 1$ aus der Ableitungsregel

$$P(x) = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta (x - x_0)^\beta \quad \Rightarrow \quad D^\alpha P(x_0) = \alpha! a_\alpha \quad \text{für } |\alpha| \leq k.$$

Es folgt analog zu Lemma 5.1: das k -te Taylorpolynom

$$(5.7) \quad P_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

ist das eindeutige Polynom vom Grad höchstens k mit $D^\alpha P(x_0) = D^\alpha f(x_0)$ für $|\alpha| \leq k$.

Folgerung 5.2 *Das k -te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.*

Beispiel 5.2 (Polynomialformel) Die Funktion $f(x) = (x_1 + \dots + x_n)^k$ ist ein Polynom vom Grad k , und es gilt

$$D^\alpha f(0) = \begin{cases} k! & \text{falls } |\alpha| = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Folgerung 5.2 (oder direkt durch Abzählen) ergibt sich

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Auch im Mehrdimensionalen approximiert das k -te Taylorpolynom bis auf Terme höherer Ordnung, nur müssen wir jetzt im Nenner Beträge setzen, da bekanntlich durch Vektoren nicht dividiert werden kann.

Satz 5.5 (Approximation durch das Taylorpolynom im $\mathbb{R}^n$) *Sei $f \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k -te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \Omega$. Dann ist P_k das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens k mit*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{|x - x_0|^k} = 0.$$

BEWEIS: Nach Satz 5.4, mit k statt $k+1$, gibt es zu $x \in \Omega$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Da $D^\alpha f$ stetig und $|(x - x_0)^\alpha| \leq |x - x_0|^k$, folgt die Konvergenz gegen Null. Für die Eindeutigkeit zeigen wir für ein beliebiges Polynom $P(x)$ vom Grad $\leq k$ folgende Implikation:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{|x - x_0|^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Angenommen es gibt $x_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $P(x_1) \neq 0$, oBdA $x_1 \neq x_0$. Mit $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, ist $\varphi(t) = P(x_t)$ eindimensionales Polynom vom Grad $\leq k$, und wegen $\lim_{t \rightarrow 0} x_t = x_0$ folgt

$$\frac{\varphi(t)}{|t|^k} = |x_1 - x_0|^k \frac{P(x_t)}{|t(x_1 - x_0)|^k} = |x_1 - x_0|^k \frac{P(x_t)}{|x_t - x_0|^k} \rightarrow 0 \quad \text{mit } t \rightarrow 0.$$

Nach Beweis von Satz 5.3 ist $\varphi(t) \equiv 0$, im Widerspruch zu $\varphi(1) = P(x_1) \neq 0$. □

Beispiel 5.3 Wir berechnen hier mit der Multiindexnotation die Taylorentwicklung erster Ordnung im Punkt $(1, 1)$ für

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Es ist $f(1, 1) = 0$, und die partiellen Ableitungen der Funktion lauten

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} f(x, y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} & D^{(0,1)} f(x, y) &= -\frac{2x}{(x+y)^2} \\ D^{(2,0)} f(x, y) &= -\frac{4y}{(x+y)^3} & D^{(1,1)} f(x, y) &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} & D^{(0,2)} f(x, y) &= \frac{4x}{(x+y)^3}. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung ist somit

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(1, 1) + D^{(1,0)} f(1, 1)((x, y) - (1, 1))^{(1,0)} + D^{(0,1)} f(1, 1)((x, y) - (1, 1))^{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) = \frac{1}{2}(x - y). \end{aligned}$$

Das Restglied lautet in Lagrangedarstellung mit Zwischenpunkt (ξ, η)

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &= \frac{D^{(2,0)} f(\xi, \eta)}{2! 0!} ((x, y) - (1, 1))^{(2,0)} + \frac{D^{(1,1)} f(\xi, \eta)}{1! 1!} ((x, y) - (1, 1))^{(1,1)} \\ &\quad + \frac{D^{(0,2)} f(\xi, \eta)}{0! 2!} ((x, y) - (1, 1))^{(0,2)} \\ &= \frac{2}{(\xi + \eta)^3} (-\eta(x - 1)^2 + (\xi - \eta)(x - 1)(y - 1) + \xi(y - 1)^2). \end{aligned}$$

Für Funktionen $f \in C^\infty(\Omega)$ kann man das Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \Omega$ zu jeder Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ berechnen, und damit auch die Taylorsche Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Die Funktion $f(x)$ heißt reell-analytisch, wenn f in der Umgebung jedes Punkts $x_0 \in \Omega$ durch diese Potenzreihe dargestellt wird, das heißt es gilt $f(x) = P(x)$ für x nahe x_0 . Nicht jede C^∞ -Funktion hat diese Eigenschaft, siehe Übungsaufgabe.

6 Potenzreihen*

In Analysis 1 haben wir Konvergenzkriterien für Reihen behandelt. Wir haben auch die Exponentialreihe sowie die Reihendarstellungen der Funktionen Cosinus und Sinus kennengelernt. Die systematische Diskussion von Reihen dieses Typs, den Potenzreihen, musste aus Zeitgründen verschoben werden, wir holen das jetzt nach.

Sei $f \in C^\infty(I)$, wobei I offenes Intervall mit $0 \in I$. Dann können wir für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ das Taylorpolynom P_k mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bilden, es lautet

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Für festes k beschreibt $P_k(x)$ das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$, und zwar umso genauer je größer k gewählt wird. Jetzt ändern wir den Blickwinkel und fragen: konvergiert für festes $x \in I$ die Folge $P_k(x)$ für $k \rightarrow \infty$? Und wenn ja, ist der Grenzwert dann der Funktionswert $f(x)$? Die Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

heißt Taylorreihe von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x = 0$. Wir betrachten generell Reihen der folgenden Form.

Definition 6.1 (Potenzreihen) Eine komplexe Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{C}.$$

Allgemeiner hat man Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt Reihen der Form $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf $z_0 = 0$. Definition 6.1 lässt offen, ob beziehungsweise für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe tatsächlich konvergiert. Klar ist $P(0) = a_0$, es kann aber sein, dass die Reihe für alle $z \neq 0$ divergiert, dann ist sie natürlich nicht relevant. Ein Beispiel ist $\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$, wie der Nullfolgentest zeigt. Bei interessanten Reihen (was immer das ist) erwarten wir aber Konvergenz für Punkte z in einem gewissen Gebiet. Auf diesem Gebiet definiert die Reihe dann eine Funktion. Wir beginnen damit, dieses Konvergenzgebiet genauer zu charakterisieren.

Beispiel 6.1 Betrachte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nach Folgerung 11.2, Analysis 1, insbesondere $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Also sind die Koeffizienten der Taylorreihe alle Null und damit auch alle Partialsummen, die Reihe konvergiert somit gegen die Nullfunktion, nicht gegen f . Übrigens hätten wir dies auch aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, Satz 13.7, Analysis 1, schließen können, denn die Menge $f^{-1}\{0\}$ hat einen Häufungspunkt in $x = 0$.

Definition 6.2 (analytische Funktion) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I offen, heißt *analytisch*, wenn jedes $x_0 \in I$ eine Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ hat, auf der f durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 dargestellt wird:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Lemma 6.1 (von Abel) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, eine Potenzreihe. Es gebe $\varrho > 0$ und $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| \varrho^k \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $P(z)$ für $|z| < \varrho$ absolut konvergent. Genauer gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$(6.1) \quad |P(z) - P_k(z)| \leq \sum_{\ell=k+1}^{\infty} |a_\ell| |z|^\ell \leq \frac{M}{1 - \frac{|z|}{\varrho}} \left(\frac{|z|}{\varrho} \right)^{k+1}.$$

Hier ist $P_k(z) = \sum_{\ell=0}^k a_\ell z^\ell$ die k -te Partialsumme.

BEWEIS: Es gilt $|a_k z^k| = |a_k| \varrho^k (|z|/\varrho)^k \leq M (|z|/\varrho)^k$. Für $|z| < \varrho$ folgt die absolute Konvergenz durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Genauer gilt

$$|P(z) - P_k(z)| \leq \sum_{\ell=k+1}^{\infty} |a_\ell| |z|^\ell \leq M \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\varrho} \right)^\ell = \frac{M}{1 - \frac{|z|}{\varrho}} \left(\frac{|z|}{\varrho} \right)^{k+1}.$$

□

Das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe sieht allgemein wie folgt aus.

Satz 6.1 (vom Konvergenzradius) Zu jeder Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gibt es genau ein $R \in [0, \infty]$, den Konvergenzradius, mit folgender Eigenschaft:

$$P(z) \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } |z| < R, \\ \text{divergent} & \text{für } |z| > R. \end{cases}$$

BEWEIS: Die Eindeutigkeit von R ist klar. Zur Existenz definieren wir

$$R = \sup\{|z| : P(z) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty].$$

Ist $|z| < R$, so gibt es nach Definition ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0| \leq R$, so dass $P(z_0)$ konvergiert. Nach dem Nullfolgenkriterium, Satz 6.1 in Analysis 1, folgt $a_k z_0^k \rightarrow 0$. Es gibt also ein $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| |z_0|^k \leq M$ für alle k . Nach Lemma 6.1, mit $\varrho = |z_0|$, ist $P(z)$ absolut konvergent. Andererseits ist die Reihe divergent für $|z| > R$ nach Definition von R . □

Beispiel 6.2 Für die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ gilt, außer im trivialen Fall $z = 0$,

$$\frac{|z^{k+1}/(k+1)!|}{|z^k/k!|} = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Nach dem Quotientenkriterium, Satz 6.6 (b) in Analysis 1, konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Der Konvergenzradius der Reihe ist $R = \infty$.

Beispiel 6.3 Die Binomialreihe zum Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ lautet

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe nach $k = \alpha$ ab, und die Binomische Formel liefert $B_\alpha(z) = (1+z)^\alpha$. Im folgenden sei nun $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Für $z \neq 0$ ist dann $a_k = \binom{\alpha}{k} z^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und es gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|\alpha - k|}{k+1} |z| \rightarrow |z| \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$, das heißt der Konvergenzradius ist $R = 1$.

Wir interessieren uns nun dafür, wie die Funktionen $P_k(z)$ gegen die Funktion $P(z)$ konvergieren. Lässt sich zum Beispiel die Stetigkeit der $P_k(z)$ auf die Grenzfunktion $P(z)$ übertragen? Das ist ein generelles und grundlegendes Problem: sei $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Folge von Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^n$, die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvergiert:

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Folgt die Stetigkeit von f aus der Stetigkeit der f_k , unter geeigneten Voraussetzungen? Das folgende Beispiel zeigt, dass die punktweise Konvergenz alleine im allgemeinen nicht die Stetigkeit der Grenzfunktion garantiert.

Beispiel 6.4 Betrachte die stetigen Funktionen $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Folge konvergiert punktweise gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Grenzfunktion ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

Na gut, das hätten wir eigentlich auch nicht erwartet. Solche Probleme kennen wir schon von der Vertauschbarkeit des Integrals mit der Konvergenz.

Satz 6.2 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit) Seien $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}^n$, die gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvergieren, also

$$\|f_k - f\|_D \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Dann ist f ebenfalls stetig auf D .

BEWEIS: Sei $x_0 \in D$ gegeben. Für $x \in D$ beliebig und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f_k - f\|_D + 2\|f - f_k\|_D. \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow x_0$ ergibt sich, da f_k stetig ist,

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq 2 \|f - f_k\|_D.$$

Mit $k \rightarrow \infty$ folgt $\limsup_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, die Stetigkeit von f in x_0 . $\square$

Satz 6.3 (Stetigkeit von Potenzreihen) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $P(z)$ stetig auf der Kreisscheibe $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

BEWEIS: Wir zeigen, dass die $P_k(z)$ auf jeder Kreisscheibe $B_r(0)$ mit $r < R$ gleichmäßig konvergieren. Die Behauptung folgt dann aus Satz 6.2. Sei $\varrho \in (r, R)$ beliebig gewählt. Da $P(\varrho)$ konvergiert, gibt es ein $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| \varrho^k \leq M$ für alle k . Nach Lemma 6.1 folgt

$$\|P - P_k\|_{B_r(0)} \leq \frac{M}{1 - \frac{r}{\varrho}} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Nun zur Frage der Differenzierbarkeit der Grenzfunktion. Aus Gründen der Einfachheit beschränken wir uns auf Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ einer Variablen.

Beispiel 6.5 Betrachte für $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $f_\varepsilon(x) = (\varepsilon^2 + x^2)^{1/2}$. Es gilt

$$|x| \leq f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon + |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

also konvergieren die f_ε gleichmäßig gegen $f(x) = |x|$. In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Satz 6.4 (Vertauschung von Konvergenz und Ableitung) Seien $f_k \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, $I = (a, b)$, punktweise konvergent gegen $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$. Konvergiert die Folge f'_k gleichmäßig gegen ein $g : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, also

$$\|f'_k - g\|_I \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty,$$

so folgt $f' = g$, und $f \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$.

BEWEIS: Wähle $x_0 \in I$. Dann besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(y) dy \quad \text{für alle } x \in I.$$

Nach Analysis 1, Satz 13.3, vertauscht das Integral mit $f'_k \rightarrow g$, also folgt mit $k \rightarrow \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(y) dy \quad \text{für alle } x \in I.$$

Nach Satz 6.2 ist g stetig. Es folgt $f' = g$ aus dem Hauptsatz. $\square$

Wir können $m = 1$ annehmen, andernfalls betrachte die

Um den Satz auf Potenzreihen anzuwenden, brauchen wir folgende Hilfsaussage.

Lemma 6.2 Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Dann hat die formal differenzierte Reihe

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k$$

denselben Konvergenzradius R .

BEWEIS: $Q(z)$ hat höchstens den Konvergenzradius von $P(z)$, denn $|a_k z^k| \leq |k a_k z^{k-1}| \cdot |z|$ für $k \geq 1$. Für $\varrho \in (0, R)$ ist $P(\varrho)$ konvergent, also gilt $|a_k| \varrho^k \leq M$ für ein $M \in [0, \infty)$. Es folgt für alle $z \in B_{\varrho}(0)$

$$|k a_k z^{k-1}| = k |a_k| \varrho^k \frac{|z|^{k-1}}{\varrho^k} \leq \frac{k M |z|^{k-1}}{\varrho^k}.$$

Die rechte Reihe konvergiert aber nach dem Quotientenkriterium, denn

$$\frac{(k+1)|z|^k}{\varrho^{k+1}} \left(\frac{k|z|^{k-1}}{\varrho^k} \right)^{-1} = \frac{(k+1)|z|}{k\varrho} \rightarrow \frac{|z|}{\varrho} < 1 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty.$$

Also ist $Q(z)$ für jedes $z \in B_R(0)$ absolut konvergent. $\square$

Satz 6.5 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen) Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion

$$P : (-R, R) \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

stetig differenzierbar, und ihre Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation:

$$(6.2) \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad \text{für alle } x \in (-R, R).$$

Hinweis. Durch Induktion folgt $P \in C^{\infty}((-R, R), \mathbb{C})$.

BEWEIS: Sei $\varrho \in (0, R)$. Nach Beweis von Satz 6.3 konvergieren die $P_k(x)$ auf $(-\varrho, \varrho)$ gleichmäßig gegen $P(x)$. Nach Lemma 6.2 konvergieren die $P'_k(x)$ auf $(-\varrho, \varrho)$ ebenfalls gleichmäßig gegen $Q(x)$, die gliedweise differenzierte Reihe. Satz 6.4 impliziert $P' = Q$ auf $(-\varrho, \varrho)$, also auf ganz $(-R, R)$. $\square$

Beispiel 6.6 Für die Potenzreihendarstellung des Logarithmus berechnen wir mit der geometrischen Reihe, für $x \in (-1, 1)$,

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k =: Q(x).$$

$Q(x)$ ergibt sich durch gliedweise Differentiation der Reihe $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^k / k$. Nach Lemma 6.2 haben $P(x)$ und $Q(x)$ denselben Konvergenzradius, also $R = 1$, und Satz 6.5 ergibt $P'(x) = Q(x)$ für $x \in (-1, 1)$. Nun ist $\log(1+x) = P(x) = 0$ für $x = 0$, also erhalten wir

$$\log(1+x) = P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Beispiel 6.7 Die Ableitung der Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Quotientenregel

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

Für die Umkehrfunktion $\arctan$ folgt, für $x \in (-1, 1)$,

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} =: Q(x).$$

$Q(x)$ ist die gliedweise Ableitung von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)$. Der gemeinsame Konvergenzradius ist $R = 1$, und aus Satz 6.5 folgt $P'(x) = Q(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$. Da $P(0) = \arctan 0 = 0$, sehen wir

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Hat ein Polynom vom Grad höchstens k mehr als k Nullstellen, so ist es bekanntlich das Nullpolynom. Erstaunlicherweise hat man für Potenzreihen eine Aussage, die als verwandt betrachtet werden kann.

Satz 6.6 (Identitätssatz für Potenzreihen) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Ist $0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS: Für $\varrho \in (0, R)$ ist $P(\varrho)$ konvergent, also $|a_k| \varrho^k \leq M$ für alle k . Nach (6.1) gilt

$$|P(z) - P_k(z)| \leq \frac{M}{1 - \frac{|z|}{\varrho}} \left(\frac{|z|}{\varrho} \right)^{k+1} \quad \text{für } |z| < \varrho.$$

Für $|z| \leq \varrho/2$ ergibt sich

$$|P(z) - P_k(z)| \leq \frac{2M}{\varrho^{k+1}} |z|^{k+1} =: C |z|^{k+1}.$$

Sei nun induktiv schon $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ gezeigt für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$|P(z) - a_k z^k| = |P(z) - P_k(z)| \leq C |z|^{k+1} \quad \text{für } |z| \leq \varrho/2.$$

Sei nun $P(z_i) = 0$ für eine Folge $z_i \neq 0$ mit $z_i \rightarrow 0$. Einsetzen von $z = z_i$ ergibt

$$|a_k| |z_i|^k = |P(z_i) - a_k z_i^k| \leq C |z_i|^{k+1},$$

also $|a_k| \leq C |z_i| \rightarrow 0$ mit $i \rightarrow \infty$. Das zeigt $a_k = 0$. □

Folgerung 6.1 (Koeffizientenvergleich) Seien $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Ist der Nullpunkt Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : P(z) = Q(z)\}$, so folgt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS: Die Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k = a_k - b_k$ hat positiven Konvergenzradius, und der Nullpunkt ist Häufungspunkt der Menge $\{z \in \mathbb{C} : F(z) = 0\}$. Die Behauptung folgt damit aus Satz 6.6. □

Beispiel 6.8 Die Binomialreihe mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$B_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Sie hat Konvergenzradius $R = 1$, siehe Beispiel 6.3. Für $x \in (-1, 1)$ gilt nach Satz 6.5

$$B'_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha-k}{k+1} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha B_\alpha(x) - x B'_\alpha(x),$$

das heißt $B'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1+x} B_\alpha(x)$. Es folgt mit $f(x) = (1+x)^{-\alpha}$

$$(f B_\alpha)'(x) = f'(x) B_\alpha(x) + f(x) B'_\alpha(x) = f(x) B_\alpha(x) \left(-\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\alpha}{1+x} \right) = 0.$$

Wegen $B_\alpha(0) = 1 = f(0)$ ergibt sich die folgende Darstellung (Newton 1665)

$$(1+x)^\alpha = B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

In der Physik wird oft die Näherung $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ benutzt, für $|x| \ll 1$.

Bisher haben wir uns immer in der offenen Kreisscheibe bewegt, auf der die Potenzreihe lokal gleichmäßig konvergiert. Zum Schluss des Kapitels betrachten wir die Situation am Rand.

Satz 6.7 (Abelscher Grenzwertsatz) Ist die Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x = 1$ konvergent, so gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} P(x) = P(1).$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung hat P Konvergenzradius $R \geq 1$. Berechne für $0 \leq x < 1$

$$\begin{aligned} P_\ell(1) - P_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell} a_k (1 - x^k) \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^{\ell} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \\ &= (1-x) \sum_{\substack{j,k=0 \\ j < k}}^{\ell} a_k x^j \\ &= (1-x) \sum_{j=0}^{\ell-1} x^j \sum_{k=j+1}^{\ell} a_k \\ &= (1-x) \sum_{j=0}^{\ell-1} x^j (P_\ell(1) - P_j(1)). \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|P_\ell(1) - P_j(1)| < \varepsilon$ für $j, \ell \geq N$, außerdem gilt $|P_j(1)| \leq C$ für alle j . Damit schätzen wir ab

$$|P_\ell(1) - P_\ell(x)| \leq 2C(1-x) \sum_{j=0}^{N-1} x^j + \varepsilon(1-x) \sum_{j=N}^{\ell-1} x^j \leq 2C(1-x)N + \varepsilon,$$

wobei zuletzt die geometrische Reihe benutzt wurde. Mit $\ell \rightarrow \infty$ und $x \nearrow 1$ folgt

$$\limsup_{x \nearrow 1} |P(1) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

□

Beispiel 6.9 Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \pm \dots$ auch für $x = 1$, also folgt aus Satz 6.7

$$\log 2 = \lim_{x \nearrow 1} \log(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots \quad (\text{Mercator 1668}).$$

Ebenso konvergiert die Reihe des arctan auch für $x = 1$, und es ergibt sich die Darstellung

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \lim_{x \nearrow 1} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots \quad (\text{Gregory 1671, Leibniz 1674}).$$

Zum Schluss kommen wir nochmal auf die Eingangsfrage zurück, nämlich ob die Taylorreihe einer Funktion $f \in C^\infty(I)$, $I = (a, b)$, gegen die Funktion f konvergiert.

Definition 6.3 (analytische Funktion) Sei I offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f *analytisch*, wenn jedes $x_0 \in I$ eine Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ hat, auf der f durch eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 dargestellt wird:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Man bezeichnet den entsprechenden Raum von Funktionen mit $C^\omega(I)$.

Die darstellende Potenzreihe kann nur die Taylorreihe sein. Denn f ist C^∞ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nach Satz 6.5, und gliedweise Differentiation ergibt

$$f^{(i)}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{ik} k! a_k = i! a_i.$$

Eine Funktion ist also genau dann analytisch, wenn sie C^∞ ist und für jedes $x_0 \in I$ gilt: die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt x_0 konvergiert punktweise gegen f nahe bei x_0 . Für die analytischen Funktionen gilt also eine Art Fernwirkung: hat man alle Ableitungen in einem Punkt $x_0 \in I$, so kennt man schon die ganze Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Hat die Menge der Nullstellen von f einen Häufungspunkt $x_0 \in I$, so ist f schon die Nullfunktion. Das folgt sofort aus Satz 6.6, angewandt im Punkt x_0 . Eine analytische Funktion kann für jedes $x_0 \in I$ auf die Kreisscheibe $B_\delta(x_0) \subset \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Dazu muss man nur in die Potenzreihe Zahlen $z \in B_\delta(x_0)$ einsetzen. In der komplexen Analysis betrachtet man komplex differenzierbare Funktionen. Es stellt sich heraus, dass diese immer analytisch sind, daraus ergibt sich die Bedeutung des Begriffs. Im allgemeinen sind aber Funktionen $f \in C^\infty(I)$ nicht analytisch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.10 Betrachte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nach Übungsaufgabe, und zwar $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also sind die Koeffizienten der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ alle Null und damit auch alle Partialsummen, die Reihe konvergiert somit gegen die Nullfunktion und nicht gegen f . In der Tat ist $x_0 = 0$ Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f .

7 Diffeomorphismen

Thema dieses und des folgenden Abschnitts ist die lokale Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, und es sei schon eine Lösung von $f(x_0) = y_0$ gegeben. Dann stellen wir uns folgende Fragen:

- (1) Hat die Gleichung $f(x) = y$ zu jedem y nahe bei y_0 eine Lösung x nahe bei x_0 ?
- (2) Ist x_0 die einzige Lösung der Gleichung $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0 ?
- (3) Falls nicht, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}\{y_0\}$ nahe bei x_0 aus?

Betrachten wir erst den affin-linearen Fall $f(x) = Ax + b$ für $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Wegen $f(x_0) = y_0$ ist dann $b = y_0 - Ax_0$, das heißt f hat die Form $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$. Also gilt

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) = y - y_0.$$

In diesem Fall liefert die Lineare Algebra folgende, sogar globale Antworten:

- (1) Es gibt eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang } A = m$.
- (2) x_0 ist einzige Lösung von $f(x) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang } A = n$.
- (3) $f^{-1}\{y_0\} = x_0 + \ker A$ ist affiner Unterraum der Dimension $n - \text{rang } A$.

Sei nun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann ist f differenzierbar in x_0 , das heißt

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(x) \quad \text{wobei } R_f(x_0) = 0, DR_f(x_0) = 0.$$

Setzen wir $A = Df(x_0)$, so ergibt sich die Formulierung

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x) = y - y_0.$$

Wir wollen dies als Störung der linearen Gleichung auffassen und hoffen, dass sich die Aussagen in einer lokalen Version geeignet übertragen lassen. In diesem Abschnitt geht es um den Fall $n = m$, das heißt es gibt genauso viele Unbekannte wie Gleichungen. Im darauffolgenden Abschnitt über implizite Funktionen behandeln wir den Fall $n \geq m$.

Definition 7.1 Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Diffeomorphismus der Klasse C^r* , wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} sind r -mal stetig differenzierbar.

Beispiel 7.1 Sei $f \in C^1(I)$, $I = (a, b)$, mit $f' > 0$ auf ganz I , also f streng monoton wachsend. Nach Analysis 1, Satz 9.4, ist dann $J := f(I)$ ein offenes Intervall, und die Umkehrfunktion $g : J \rightarrow I$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$g' = \frac{1}{f' \circ g} \in C^0(J).$$

Also ist f ein C^1 -Diffeomorphismus auf $J = f(I)$. Im Fall $f' < 0$ auf I folgt das natürlich analog. Umgekehrt: ist $f : I \rightarrow J$ ein C^1 -Diffeomorphismus zwischen offenen Intervallen, mit Umkehrfunktion $g : J \rightarrow I$, so ergibt die Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \neq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz ist entweder $f' > 0$ oder $f' < 0$ auf I . Zum Beispiel ist die Abbildung $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = x^3$, zwar bijektiv, genauer streng monoton wachsend, und von der Klasse C^1 , aber wegen $f'(0) = 0$ kann sie kein C^1 -Diffeomorphismus sein. In der Tat, die Umkehrabbildung ist im Punkt $y = 0$ nicht differenzierbar:

$$g : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1), g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

Beispiel 7.2 (Polarkoordinaten) Seien $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$f \in C^\infty(U, V), f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Die Umkehrabbildung $g : V \rightarrow U$ lautet mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$g(x, y) = \begin{cases} (r, \arccos \frac{x}{r}) & \text{für } y > 0 \\ (r, \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{r}) & \text{für } x < 0, \\ (r, \pi + \arccos(-\frac{x}{r})) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die Darstellungen sind jeweils in C^∞ , also ist f ein C^∞ -Diffeomorphismus.

Beispiel 7.3 (Inversion) Die Inversion an der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n)$ und $f^{-1} = f$, also ist f ein C^∞ -Diffeomorphismus. Die beschränkte Menge $B_1(0)$ geht unter f in die unbeschränkte Menge $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$.

Lemma 7.1 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f : U \rightarrow V$ bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \rightarrow U$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ist f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist die lineare Abbildung $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar. insbesondere muss $m = n$ sein. Weiter gilt

$$Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1} \quad \text{mit } y_0 = f(x_0).$$

BEWEIS: Aus $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ folgt jeweils mit der Kettenregel

$$Dg(y_0)Df(x_0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{und} \quad Df(x_0)Dg(y_0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Also ist $Df(x_0)$ injektiv und surjektiv, sprich invertierbar, und es folgt $m = n$. □

Das Lemma besagt, dass ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ nur möglich ist für $m = n$. Dies wird als Invarianz der Dimension bezeichnet. Nach einem Satz von Brouwer (1910) bleibt die Dimension auch unter Homeomorphismen erhalten, das heißt f und f^{-1} sind nur stetig. Peano hatte zuvor surjektive stetige Abbildungen von einem Intervall auf die Fläche eines Quadrats konstruiert, daher stellte sich die Frage nach der Invarianz der Dimension. Die Peanokurven sind aber keine Homeomorphismen, sie sind nicht injektiv. Der Satz von Brouwer wird mit dem Konzept des Abbildungsgrads bewiesen, das in der nichtlinearen Funktionalanalysis oder der Algebraischen Topologie eingeführt wird.

Man bezeichnet $\det Df(x_0)$ als Jacobideterminante³ von f im Punkt x_0 . In der Situation von Lemma 7.1 folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$(7.1) \quad \det Dg(y_0) \det Df(x_0) = 1 \quad \text{für } y_0 = f(x_0).$$

Lemma 7.2 (Höhere Ableitungen der Umkehrfunktion) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \rightarrow V$ bijektiv. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und ist die Umkehrabbildung $g : V \rightarrow U$ differenzierbar, so folgt $g \in C^r(V, U)$.*

BEWEIS: Nach Lemma 7.1 ist $Df(x)$ invertierbar und es gilt $Dg = (Df)^{-1} \circ g$, also nach der Cramerschen Regel

$$(7.2) \quad \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ji}(Df)}{\det Df} \circ g.$$

Dabei bezeichnet $M_{ji}(Df)$ die Determinante der Matrix, die aus Df durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $r \in \mathbb{N}$. Da g nach Voraussetzung differenzierbar und somit stetig ist, vgl. Satz 3.2, ist für $f \in C^1$ die rechte Seite in (7.2) stetig als Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen, und damit $g \in C^1$. Ist $f \in C^r$ und induktiv schon $g \in C^{r-1}$, so ist die rechte Seite von der Klasse C^{r-1} als Produkt, Quotient und Verkettung von C^{r-1} -Funktionen, siehe Folgerung 3.1, und damit $g \in C^r$, was zu zeigen war. $\square$

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir die Frage der Existenz einer Lösung angehen. Für eine allgemeine nichtlineare Gleichung kann nicht erwartet werden, dass die Lösung durch eine explizite Formel geliefert wird. Vielmehr brauchen wir einen abstrakten Existenzsatz. Dazu die folgenden Definitionen.

Definition 7.2 *Eine Folge x_k , $k \in \mathbb{N}$, in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle } k, l > K.$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge x_k in X konvergiert, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $d(x, x_k) \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$.

Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Abstandsfunktion ein vollständiger metrischer Raum. Aber jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit dem Euklidischen Abstand auch ein vollständiger metrischer Raum, denn eine Cauchyfolge $x_k \in A$ ist auch Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ und konvergiert damit gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $x \in A$ wegen A abgeschlossen.

Satz 7.1 (Fixpunktsatz von Banach)⁴ *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und $F : X \rightarrow X$ eine Kontraktion, das heißt es gibt ein $\theta \in [0, 1)$ mit*

$$(7.3) \quad d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

³C. G. J. Jacobi, 1805-1851

⁴S. Banach, 1892-1945

BEWEIS: Die Eindeutigkeit ist klar, denn aus $F(x) = x$ und $F(y) = y$ folgt

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0, \text{ also } x = y.$$

Um den Fixpunkt zu konstruieren, betrachten wir die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$. Es folgt aus (7.3) für $n \geq 1$

$$(7.4) \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \theta d(x_n, x_{n-1}).$$

Wir können uns einen müder werdenden Frosch vorstellen, dessen Sprünge jedes Mal um ein Faktor $\theta \in [0, 1)$ kürzer werden. Wie weit kann der Frosch insgesamt kommen? Es folgt per Induktion aus (7.4)

$$(7.5) \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

und hieraus weiter mit der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Indem wir x_n statt x_0 als Startwert auffassen, haben wir für $m > n$

$$(7.6) \quad d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge, und konvergiert nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Da F nach Voraussetzung Lipschitzstetig ist (mit Konstante θ), folgt

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

und die Existenz des Fixpunkts ist gezeigt. $\square$

Aus Sicht der Numerik ist eine Abschätzung von Interesse, wie weit die Iteration im n -ten Schritt noch vom gesuchten Fixpunkt entfernt ist. Mit $m \rightarrow \infty$ folgt aus (7.6)

$$d(x, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Das folgende zentrale Resultat wird auch als Umkehrsatz bezeichnet.

Satz 7.2 (über inverse Funktionen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung U von x_0 , so dass gilt:

- (a) $V = f(U)$ ist offene Umgebung von $y_0 = f(x_0)$
- (b) $f|_U : U \rightarrow V$ ist Diffeomorphismus der Klasse C^1 .

Zusatz. Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$.

BEWEIS: **Schritt 1** Formulierung als Fixpunktproblem

Mit $y_0 = f(x_0)$, $A := Df(x_0)$ und $R_f(x) := f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))$ hatten wir

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x) = y - y_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 + A^{-1}(y - y_0 - R_f(x)).$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir also $\phi_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_y(x) = x_0 + A^{-1}(y - y_0 - R_f(x))$, und erhalten

$$(7.7) \quad f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \phi_y(x) = x.$$

Schritt 2 Konstruktion der Lösung

Wir bestimmen $\delta_0 > 0$, so dass für jedes $\delta \in (0, \delta_0]$ die Abbildung $\phi_y : \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$ definiert und kontrahierend ist, sofern $y \in B_\varepsilon(y_0)$ mit $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$. Setze $\Lambda = |A^{-1}| \in (0, \infty)$. $DR_f(x) = Df(x) - A$ ist stetig mit $DR_f(x_0) = 0$, folglich gibt es $\delta_0 > 0$ mit

$$\overline{B_{\delta_0}(x_0)} \subset \Omega \quad \text{und} \quad \|DR_f(x)\| \leq \frac{1}{2\Lambda} \quad \text{für } |x - x_0| \leq \delta_0.$$

Aus dem Schrankensatz, siehe Satz 4.2, folgt

$$(7.8) \quad x_{1,2} \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \quad \Rightarrow \quad |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \leq \frac{1}{2\Lambda} |x_1 - x_2|.$$

Wir berechnen nun

$$|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| = |A^{-1}R_f(x_1) - A^{-1}R_f(x_2)| \leq \Lambda |R_f(x_1) - R_f(x_2)|.$$

Also folgt aus (7.8) die Kontraktionseigenschaft

$$(7.9) \quad x_{1,2} \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$$

Wir müssen sicherstellen, dass ϕ_y eine Selbstabbildung ist. Dazu schätzen wir ab

$$\begin{aligned} |\phi_y(x) - x_0| &= |A^{-1}(y - y_0 - R_f(x))| \\ &\leq \Lambda(|y - y_0| + |R_f(x) - R_f(x_0)|) \quad (\text{da } R_f(x_0) = 0) \\ &\leq \Lambda|y - y_0| + \frac{1}{2}|x - x_0| \quad \text{für } x \in \overline{B_{\delta_0}(x_0)} \text{ nach (7.8)}. \end{aligned}$$

Also folgt für $\delta \in (0, \delta_0]$, wenn wir $\varepsilon = \delta/(2\Lambda) > 0$ wählen,

$$(7.10) \quad x \in \overline{B_\delta(x_0)}, y \in B_\varepsilon(y_0) \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x) - x_0| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Wegen (7.10) und (7.9) ist $\phi_y : \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$ eine Kontraktion mit Konstante $\theta = 1/2$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es zu jedem $y \in B_\varepsilon(y_0)$ genau ein $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, das heißt $f(x) = y$ nach (7.7). Es ist sogar $x \in B_\delta(x_0)$, denn nach (7.10) gilt $|x - x_0| = |\phi_y(x) - x_0| < \delta$. Die Mengen $V = B_\varepsilon(y_0)$ und $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(x_0)$ sind offen, vgl. Satz 1.6 für die Offenheit von U . Also gilt Behauptung (a), und $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv.

Schritt 3 Differenzierbarkeit der inversen Abbildung

Sei $g : V \rightarrow U$ die Umkehrabbildung von $f|_U : U \rightarrow V$. Dann gilt

$$(7.11) \quad |g(y) - x_0| = |\phi_y(g(y)) - x_0| \leq \Lambda|y - y_0| + \frac{1}{2}|g(y) - x_0| \quad \Rightarrow \quad |g(y) - x_0| \leq 2\Lambda|y - y_0|.$$

Insbesondere ist g stetig in y_0 mit $g(y_0) = x_0$. Wir zeigen nun $Dg(y_0) = A^{-1}$. Für $y \neq y_0$ ist $g(y) \neq x_0$ und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|g(y) - (g(y_0) + A^{-1}(y - y_0))|}{|y - y_0|} &= \frac{|\phi_y(g(y)) - x_0 - A^{-1}(y - y_0)|}{|y - y_0|} \\ &= \frac{|A^{-1}R_f(g(y))|}{|y - y_0|} \\ &\leq \Lambda \frac{|R_f(g(y))|}{|g(y) - x_0|} \frac{|g(y) - x_0|}{|y - y_0|}. \end{aligned}$$

Mit $y \rightarrow y_0$ geht die rechte Seite gegen Null, denn es ist $|g(y) - x_0|/|y - y_0| \leq 2\Lambda$ nach (7.11) und $|R_f(x)|/|x - x_0| \rightarrow 0$ mit $x = g(y) \rightarrow x_0$. Dies zeigt $Dg(y_0) = A^{-1}$.

Um die Differenzierbarkeit von g auf ganz V zu bekommen, wählen wir $\delta \in (0, \delta_0]$ so klein, dass $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$. Sei $y \in V$ beliebig gegeben. Die Voraussetzungen des Satzes gelten dann für $f|_U \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $x = g(y) \in U$. Wie bewiesen gibt es also $\tilde{U} \subset U$ mit folgenden Eigenschaften: $\tilde{V} = f(\tilde{U})$ ist offene Umgebung von $y = f(x)$, $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ist bijektiv, und $\tilde{g} = (f|_{\tilde{U}})^{-1}$ ist differenzierbar in y . Aber $g|_{\tilde{V}} = \tilde{g}$ da $f|_U$ injektiv. Somit ist g differenzierbar in $y \in V$.

Lemma 7.2 liefert schließlich $g \in C^1(V, U)$. Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g \in C^r(V, U)$, ebenfalls nach Lemma 7.2. $\square$

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes halten wir fest:

Folgerung 7.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$, so ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

BEWEIS: Nach Satz 7.2 hat jeder Punkt $y \in f(\Omega)$ eine offene Umgebung $V \subset f(\Omega)$. $\square$

Beispiel 7.4 Wie wir in Beispiel 7.1 gesehen haben, bildet eine eindimensionale Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' \neq 0$ das gesamte Definitionsintervall diffeomorph auf das Bildintervall ab, das heißt es gilt eine globale Version des Umkehrsatzes. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Funktionen mehrerer Variabler im allgemeinen nicht wahr ist. In reellen Koordinaten $z = x + iy$ lautet die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die Jacobideterminante von $\exp$ ist nirgends Null, genauer gilt

$$D \exp(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \det D \exp(x, y) = e^{2x} \neq 0.$$

Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn es ist $\exp(x, y + 2k\pi) = \exp(x, y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

8 Implizite Funktionen

Thema dieses Kapitels ist die lokale Lösung nichtlinearer Gleichungen im unterbestimmten Fall, das heißt es gibt mehr Unbekannte als Bedingungen. Dazu nehmen wir an, dass die Variablen in zwei Gruppen eingeteilt sind:

$$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k), \quad f = f(x, y), \quad \text{wobei } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k.$$

Die Frage aus dem letzten Kapitel lautet präziser:

- Sei $f(x_0, y_0) = z_0$ gegeben. Wie sieht die Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = z_0$ nahe bei (x_0, y_0) aus?
- Können wir die Gleichung nach y eindeutig auflösen, sprich die Lösungsmenge lokal als Graph $y = g(x)$ darstellen?

Die Lösungen einer Gleichung $f(x, y) = z_0$ kann im allgemeinen nicht explizit durch Umformungen berechnet werden; deshalb wird $y = g(x)$ als implizit gegebene Funktion bezeichnet.

Beispiel 8.1 Betrachte die Gleichung

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Die Lösungsmenge ist der Einheitskreis $\mathbb{S}^1$. Hier ist die Auflösung der Gleichung explizit möglich: ist $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1$ mit $y_0 > 0$, so kann $\mathbb{S}^1$ in einer Umgebung als Graph $y = \sqrt{1 - x^2}$ dargestellt werden. Analog im Fall $y_0 < 0$, mit Graphenfunktion $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Dagegen hat der Punkt $(1, 0)$ keine Umgebung, in der die Gleichung eindeutig nach y aufgelöst werden kann, für $x < 1$ gibt es nahebei die beiden Lösungen $(x, \pm\sqrt{1 - x^2})$, und für $x > 1$ gar keine.

Für eine reelle Funktion $f = f(x, y)$ von zwei Variablen kann die Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = z_0$ als Höhenlinie interpretiert werden. Allerdings ist die Bezeichnung salopp, es kann Singularitäten geben, in denen die Menge nicht lokal wie eine Linie aussieht. Ein Beispiel ist die Gleichung $xy = 0$, die im Nullpunkt nicht regulär ist. Es kann vorkommen, dass alle Lösungen singuläre Punkte sind, etwa bei der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$. Wir betrachten nun den linearen Fall, um ein Kriterium für die lokale Lösbarkeit von Gleichungen zu erhalten.

Beispiel 8.2 Betrachte eine lineare Funktion von zwei Variablen, also

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung $f(x, y) = z_0$ ist genau dann nach y auflösbar wenn $b \neq 0$, die Funktion lautet

$$y = \frac{1}{b}(z_0 - ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

In höheren Dimensionen ist die Sache analog. Für $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear unterteilen wir die $k \times (m + k)$ -Matrix in eine $k \times m$ -Matrix A und eine $k \times k$ -Matrix B , d. h.

$$f(x, y) = Ax + By \quad \text{mit } A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k), \quad B \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k).$$

Die Gleichung $Ax + By = z_0$ hat zu festem $x \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Auflösung nach y dann und nur dann, wenn B invertierbar ist. Ist das der Fall, so lautet die Auflösung

$$y = B^{-1}(z_0 - Ax), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Allgemein schreiben wir die Jacobimatrix von $f = f(x, y)$ in der Form

$$Df(x, y) = (D_x f(x, y), D_y f(x, y)) \in (\mathbb{R}^{k \times m}, \mathbb{R}^{k \times k}).$$

Wenn wir nach $y = g(x)$ auflösen wollen, so sollte nach Beispiel 8.2 die Ableitung $D_y f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertierbar sein. In den Anwendungen ist die Einteilung in die beiden Variablengruppen nicht immer vorgegeben, das heißt es könnte nach verschiedenen Gruppen von je k Variablen aufgelöst werden. So kann der Einheitskreis in einer Umgebung von $(1, 0)$ zwar nicht als Graph $y = g(x)$ geschrieben werden, wohl aber als Graph $x = g(y)$, und außer in den vier Punkten $\pm e_1, \pm e_2$ könnte sowohl nach x als auch nach y aufgelöst werden.

Merkregel. Die Ableitung nach den Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, muss invertierbar sein. Im Fall $k = 1$ bedeutet das einfach

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Satz 8.1 (über implizite Funktionen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Ist $f(x_0, y_0) = z_0$ und $D_y f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 und $V \subset \mathbb{R}^k$ von y_0 , sowie eine Funktion $g \in C^1(U, V)$, mit

$$(8.1) \quad \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = z_0\} = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Es folgt $g(x_0) = y_0$, und die Funktion g hat die Ableitung

$$(8.2) \quad Dg(x_0) = -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(x_0, y_0).$$

Zusatz. Für jedes $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt die Implikation

$$f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k) \Rightarrow g \in C^r(U, \mathbb{R}^k).$$

BEWEIS: Wir verwenden einen Trick, um den Satz über inverse Funktionen anwenden zu können, und zwar betrachten wir $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)$, $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{m \times m} & \mathbb{R}^{m \times k} \\ \mathbb{R}^{k \times m} & \mathbb{R}^{k \times k} \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$ nach Voraussetzung⁵. Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $U_0 \times V$ von (x_0, y_0) , W von (x_0, z_0) , so dass $F : U_0 \times V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus ist. Wir bezeichnen die Umkehrabbildung mit $G \in C^1(W, U_0 \times V)$. Ist $(x, z) \in W$, also $(x, z) = (x, f(x, y))$ mit $(x, y) \in U_0 \times V$ nach Konstruktion, so folgt

$$G(x, z) = G(x, f(x, y)) = G(F(x, y)) = (x, y).$$

Also gilt $G(x, z) = (x, g_0(x, z))$ mit $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$. Sei U die Menge der $x \in U_0$ mit $(x, z_0) \in W$. Da W offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, ist U offen in $\mathbb{R}^m$. Außerdem ist $x_0 \in U$ wegen $(x_0, z_0) \in W$. Für $(x, y) \in U \times V$ berechnen wir

$$\begin{aligned} f(x, y) = z_0 &\Leftrightarrow F(x, y) = (x, z_0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = G(x, z_0) \quad (\text{da } (x, z_0) \in W) \\ &\Leftrightarrow y = g_0(x, z_0). \end{aligned}$$

⁵ $\varphi(D) = \det \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ ist multilinear und alternierend in den Spalten von D , mit $\varphi(E_k) = 1$

Also gilt der Satz mit $g(x) = g_0(x, z_0)$. Die Formel für die Ableitung folgt aus der Kettenregel:

$$f(x, g(x)) = z_0 \quad \Rightarrow \quad D_x f(x_0, y_0) + D_y f(x_0, y_0) Dg(x_0) = 0.$$

□

Beispiel 8.3 Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung hängen von den Koeffizienten ab. Betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p, q, \lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = \left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Setze $N = \{(p, q, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p, q, \lambda) = 0\}$. Für $(p_0, q_0, \lambda_0) \in N$ berechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2\left(\lambda_0 + \frac{p_0}{2}\right) \quad \text{wobei } 0 \leq \left(\lambda_0 + \frac{p_0}{2}\right)^2 = \frac{p_0^2}{4} - q_0.$$

Nach Satz 8.1 gibt es im Fall $\frac{p_0^2}{4} - q_0 > 0$ lokal eine eindeutige Auflösung $\lambda = \lambda(p, q)$. Das sehen wir natürlich auch direkt mit der p - q -Formel, die Auflösung ist

$$\lambda(p, q) = \begin{cases} -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \lambda_0 > -\frac{p_0}{2}, \\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \lambda_0 < -\frac{p_0}{2}. \end{cases}$$

Im Fall $\frac{p_0^2}{4} - q_0 = 0$ ist die Bedingung von Satz 8.1 nicht erfüllt. Und tatsächlich gibt es für $\frac{p^2}{4} < q$ keine Lösung, für $\frac{p^2}{4} > q$ nahebei die zwei Lösungen aus der p - q -Formel.

Beispiel 8.4 Betrachte jetzt $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(b, \lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0$. Sei λ_0 eine einfache Nullstelle von $f(a, \lambda)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ fest, das heißt es gilt

$$f(a, \lambda) = (\lambda - \lambda_0) q(\lambda) \quad \text{für ein Polynom } q(\lambda) \text{ mit } q(\lambda_0) \neq 0.$$

Es folgt $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Umgebung $U \times V$ von (a, λ_0) , so dass zu jedem $b \in U$ genau eine Nullstelle $\lambda(b) \in V$ von $f(b, \cdot)$ existiert. Diese hängt unendlich oft differenzierbar von b ab, und es gilt für $0 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial b_i}(a, \lambda_0) = -\frac{\lambda_0^i}{n\lambda_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\lambda_0^{n-2} + \dots + a_1}.$$

Wir kommen nun zurück zur Interpretation als Höhenlinie bzw. allgemeiner Niveaumenge. Wir hatten im zweidimensionalen Fall bereits heuristisch die Unterscheidung zwischen regulären und singulären Punkten gemacht. In regulären Punkten sieht eine Niveaumenge lokal wie ein Unterraum aus, insbesondere hat die Menge in dem Punkt einen Tangentialraum. Diese Konzepte sollen nun definiert werden. Den Begriff des Tangentialraums hatten wir im Fall von Graphen bereits durch Blow-up eingeführt, siehe Kapitel 3.

Definition 8.1 Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst m -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^r , wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^r -Diffeomorphismus $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$ mit

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

Wir nennen den Diffeomorphismus ϕ eine (lokale) Plättung von M . Im Einzelfall kann der Nachweis, dass eine gegebene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, anhand der Definition mühevoll sein. Für Mengen, die als Niveaumengen einer Funktion gegeben sind, liefert jedoch der Satz über implizite Funktionen folgendes Kriterium.

Satz 8.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m + k = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) M ist eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r .
- (2) Niveaumengenkriterium: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\text{rang } Df(p) = k$.
- (3) Graphenkriterium: Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $g \in C^r(U, V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

BEWEIS: Wir zeigen $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

Nach (1) gibt es zu jedem $p \in M$ eine C^r -Plättung $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$ mit $p \in \Omega$. Definiere $f = \pi_2 \circ \phi$ wobei $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\pi_2(x, y) = y$. Dann folgt für $q \in \Omega$ beliebig

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

π_2 ist linear, insbesondere C^∞ , also ist nach Kettenregel $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit Ableitung $Df(p) = D\pi_2(f(p))D\phi(p) = \pi_2 D\phi(p)$. Aber $D\phi(p)$ ist invertierbar nach Lemma 7.1, es folgt $\text{rang } Df(p) = \text{rang } \pi_2 = k$.

Ist (2) erfüllt, so ist nach evtl. Permutation der Koordinaten $D_y f(p)$ invertierbar, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, und (3) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

Sei (3) gegeben, also $M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}$ mit $g \in C^r(U, V)$, eventuell nach Permutation der Koordinaten. Die Abbildung $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, $\phi(x, y) = (x, y - g(x))$, ist bijektiv mit $\phi^{-1}(x, z) = (x, z + g(x))$. Also ist die Einschränkung $\phi : U \times V \rightarrow \phi(U \times V)$ ein C^r -Diffeomorphismus, und es gilt

$$\phi(M \cap (U \times V)) = \phi(\{(x, g(x)) : x \in U\}) = U \times \{0\}.$$

Dies zeigt (1), womit der Satz insgesamt bewiesen ist. □

Beispiel 8.5 Die Sphäre $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ ist eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{m+1}$ der Klasse C^∞ . Denn es gilt

$$\mathbb{S}^m = f^{-1}(\{0\}) \text{ für } f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|^2 - 1.$$

Da $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^m$, ist das Niveaumengenkriterium aus Satz 8.2 anwendbar.

Definition 8.2 $v \in \mathbb{R}^n$ heisst *Tangentenvektor* von $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt $p \in M$, falls es eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Die Menge der Tangentenvektoren von M im Punkt p wird mit $T_p M$ bezeichnet.

Je nach Menge M kann $T_p M$ nur aus dem Nullvektor bestehen, betrachte etwa $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0, x, y \geq 0\}$ im Punkt $p = (0, 0)$. Unser Interesse gilt aber dem Fall, wenn M eine Untermannigfaltigkeit ist.

Folgerung 8.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dim. C^1 -Untermannigfaltigkeit, und $n = m + k$. Ist $p \in M \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$ für eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit $\text{rang } Df(p) = k$, so gilt

$$T_p M = \ker Df(p).$$

Insbesondere ist $T_p M$ ein m -dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Für $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ist $f(\gamma(t)) = 0$. Mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ folgt mit Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = Df(p)v, \quad \text{also} \quad T_p M \subset \ker Df(p).$$

Nach Satz 8.2 gibt es andererseits, nach eventueller Permutation der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V$, sowie $g \in C^1(U, V)$ mit

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Die Graphenabbildung $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $G(x) = (x, g(x))$, bildet nach M ab. Mit $p = (x_0, g(x_0))$ für $x_0 \in U$ geeignet folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$DG(x_0)\xi = \frac{d}{dt} G(x_0 + t\xi)|_{t=0} \in T_p M, \quad \text{also} \quad \text{Bild } DG(x_0) \subset T_p M.$$

$DG(x_0)$ ist injektiv, denn $DG(x_0)\xi = (\xi, Dg(x_0)\xi)$, also ist $\dim \text{Bild } DG(x_0) = m$. Andererseits liefern Dimensionsformel und Voraussetzung

$$\dim \ker Df(p) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Bild } Df(p) = n - k = m.$$

Zusammen ergibt sich $\text{Bild } DG(x_0) = T_p M = \ker Df(p)$. □

Die Folgerung zeigt: für eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist der Tangentialraum ein Vektorraum der Dimension m . Damit ist die Dimension einer Untermannigfaltigkeit wohldefiniert, es kann nicht Plättungen zu verschiedenen m geben. Wir kommen nun zur Multiplikationsregel von Lagrange.

Satz 8.3 (Extrema mit Nebenbedingungen) Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ habe in p ein Minimum unter der Nebenbedingung $f(q) = z_0$, das heißt

$$f(p) = z_0 \quad \text{und} \quad \varphi(p) \leq \varphi(q) \quad \text{für alle } q \in \Omega \text{ mit } f(q) = z_0.$$

Ist dann $\text{rang } Df(p) = k$, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\text{grad } \varphi(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } f_i(p)$.

BEWEIS: Nach Verkleinerung von Ω ist $\text{rang } Df = k$ auf ganz Ω , und $M = f^{-1}(\{z_0\})$ ist m -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $m = n - k$, vgl. Satz 8.2. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, so hat $\varphi \circ \gamma$ in $t = 0$ ein lokales Minimum und folglich

$$0 = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \text{grad } \varphi(p), v \rangle, \quad \text{also} \quad \text{grad } \varphi(p) \in (T_p M)^\perp.$$

Analog folgt $\text{grad } f_i(p) \in (T_p M)^\perp$, denn die f_i sind auf M konstant. Wir behaupten, dass die $\text{grad } f_i(p)$, $i = 1, \dots, k$, den Raum $(T_p M)^\perp$ erzeugen. Nach Folgerung 8.1 hat $(T_p M)^\perp$ die Dimension k . Nach Voraussetzung ist aber $\text{rang } Df(p) = k$, das heißt der von den Zeilen aufgespannte Raum hat Dimension k . Dies zeigt unsere Behauptung, und der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 8.6 Für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch betrachten wir das Minimierungsproblem

$$\langle Bx, x \rangle \longrightarrow \min. \quad \text{unter Nebenbedingung } |x|^2 = 1.$$

Wir setzen $\varphi(x) = \langle Bx, x \rangle$ und $f(x) = |x|^2$. Da $f^{-1}\{1\} = \mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist und $\varphi(x)$ stetig, wird das Infimum in einem $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ angenommen. Mit Satz 8.3 gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } \varphi(v) = \lambda \text{ grad } f(v), \quad \text{also } Bv = \lambda v.$$

Somit hat jede symmetrische Matrix B mindestens einen Eigenvektor. Dies wurde in Satz 4.6 schon mit einem direkten Argument gezeigt.

Wir haben die Sätze über inverse und implizite Funktionen im Endlichdimensionalen formuliert, um das Wesentliche ohne zuviel Abstraktion darzustellen. An der Verallgemeinerung auf Abbildungen zwischen Banachräumen besteht aber großes Interesse: in den Anwendungen ist die Gleichung $f(x) = y$ zum Beispiel eine nichtlineare Differentialgleichung, die durch eine gesuchte Funktion x in einem geeigneten Funktionenraum X gelöst werden soll. Eine Inspektion des Beweises des Umkehrsatzes ergibt, dass die Konstruktion der inversen Abbildung einschließlich ihrer Differenzierbarkeit ohne Änderungen auch dann richtig ist, wenn f eine offene Teilmenge des Banachraums X in den Banachraum Y abbildet. Allerdings muss der Begriff der linearen Abbildung wie folgt ergänzt werden:

$$L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ linear}, \|A\| < \infty\} \quad \text{mit } \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

$\|A\|$ heißt Operatornorm von A , eine lineare Abbildung mit $\|A\| < \infty$ wird auch als beschränkter Operator bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, dass die Bedingung $\|A\| < \infty$ äquivalent zur Stetigkeit von A ist. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ ist automatisch $\|A\| < \infty$, siehe Beispiel 7.10 in Analysis 1, für $\dim X = \infty$ muss das extra verlangt werden. Zum Beispiel wird in der Definition der Differenzierbarkeit $Df(x_0) \in L(X, Y)$ gefordert. Von den Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ wurde beim Beweis des Umkehrsatzes nur explizit Gebrauch gemacht für die Cramersche Regel, um die höhere Differenzierbarkeit der Inversen zu etablieren. Dazu gibt es aber eine Alternative ohne Koordinaten, man verwendet die Neumannsche Reihe

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \text{für } eA \in L(X, X) \text{ mit } \|A\| < 1.$$

Zusammenfassend gelten Versionen der Sätze über inverse und implizite Funktionen auch für Abbildungen zwischen Banachräumen.

9 Parameterabhängige Integrale

In diesem Abschnitt behandeln wir Integrale, deren Integranden von zusätzlichen Parametern abhängen. Dies ist eine typische Problematik in zahlreichen Anwendungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Für eine gegebene Funktion $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, betrachten wir die neue Funktion

$$(9.1) \quad \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \int_I f(x, y) dy.$$

Diese Funktion wird als parameterabhängiges Integral bezeichnet, wobei die Parameter hier die Punkte $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ sind. Damit ϕ wohldefiniert ist, müssen die Integrale existieren, also sollte für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $f(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$, Riemann-integrierbar sein. Wir interessieren uns für die Stetigkeit und Ableitung der Funktion $\phi(x)$. Ein nützlicher Begriff ist dabei die Oszillationsfunktion einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{osc}(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in D, |x - x'| < \delta\}.$$

Die Funktion f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn $\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{osc}(f, \delta) = 0$.

Satz 9.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen) *Sei $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ kompakt. Ist $f \in C^0(\Omega \times I)$, so ist die Funktion*

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \int_I f(x, y) dy,$$

wohldefiniert und stetig.

BEWEIS: Die Funktion $\phi(x)$ ist wohldefiniert, denn für $x \in \Omega$ ist $f(x, \cdot) \in C^0(I)$ und damit Riemann-integrierbar (siehe Satz 13.5). Wir berechnen für $x, x' \in \Omega$

$$|\phi(x') - \phi(x)| \leq \int_I |f(x', y) - f(x, y)| dy \leq |I| \sup_{y \in I} |f(x', y) - f(x, y)|.$$

Wähle $R > 0$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Dann ist $f(x, y)$ gleichmäßig stetig auf $\overline{B_R(x)} \times I$, vgl. Satz 13.4, insbesondere folgt für $|x' - x| < \delta \leq R$

$$\sup_{y \in I} |f(x', y) - f(x, y)| \leq \text{osc}(f|_{\overline{B_R(x)} \times I}, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0.$$

□

Wir gehen direkt weiter zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung.

Satz 9.2 (Differentiation unter dem Integral) *Sei $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a, b]$ kompakt. Es gelte:*

- (a) $f(x, \cdot)$ ist Riemann-integrierbar für jedes $x \in \Omega$.
- (b) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existiert und ist stetig auf $\Omega \times I$.

Dann ist $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_I f(x, y) dy$, nach x_j partiell differenzierbar, und zwar gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Sind f und $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ in $C^0(\Omega \times I)$, so ist $\phi \in C^1(\Omega)$.

BEWEIS: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + she_j, y) ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) ds.$$

Sei wieder $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ und $|h| < \delta \leq R$, dann schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy \right| &= \left| \int_I \left(\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) dy \right| \\ &= \left| \int_I \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right) ds dy \right| \\ &\leq \int_I \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| ds dy \\ &\leq |I| \sup_{y \in I, |x' - x| \leq |h|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \\ &\leq |I| \operatorname{osc} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} |_{\overline{B_R(x)} \times I}, \delta \right) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Vertauschung der Ableitung mit dem Integral gerechtfertigt. Satz 9.1 impliziert weiter $\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C^0(\Omega)$. Sind nun f und alle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $C^0(\Omega \times I)$, so folgt $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \in C^0(\Omega)$ aus Satz 9.1 bzw. wie gerade gezeigt. $\square$

Beispiel 9.1 Wir berechnen hier das Integral der Gaußschen Dichtefunktion (das früher auf 10-Mark-Scheinen zu finden war)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Beweis ist trickreich, ich wäre wohl selbst nicht drauf gekommen. Setze

$$F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \left(\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \right)^2,$$

und berechne mit Hauptsatz und anschließender Substitution $\xi = xy$, also $d\xi = x dy$,

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2} dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy,$$

wobei $f(x, y) = -e^{-(1+y^2)x^2}/(1+y^2)$. Da f auf $(0, \infty) \times [0, 1]$ glatt ist, können wir nach Satz 9.2 den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ herausziehen, und mit $\phi(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ folgt

$$\phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = F'(x).$$

Nun gilt $F(0) - \phi(0) = \int_0^1 (1 + y^2)^{-1} dy = \arctan 1 = \pi/4$, also $F(x) = \phi(x) + \pi/4$ für alle $x \in [0, \infty)$. Aber $|\phi(x)| \leq e^{-x^2} \rightarrow 0$ mit $x \rightarrow \infty$, und so

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

In dieser Vorlesung werden wir aus Zeitgründen kein mehrdimensionales Integral behandeln, dies soll in Analysis 3 ausführliches Thema sein. Immerhin können wir als nützliche Anwendung hier die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in Mehrfachintegralen folgern.

Satz 9.3 (Kleiner Fubini) Seien $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$ kompakte Intervalle. Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, y) dy \right) dx \quad \text{für } f \in C^0(I \times J).$$

BEWEIS: Wir betrachten die Funktionen $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^x f(\xi, y) d\xi \right) dy \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_a^x \left(\int_\alpha^\beta f(\xi, y) dy \right) d\xi.$$

Nach Satz 9.1 sind $y \mapsto \int_a^x f(\xi, y) d\xi$ sowie $\xi \mapsto \int_\alpha^\beta f(\xi, y) dy$ stetig, und damit beide Seiten wohldefiniert mit $\phi(a) = \psi(a) = 0$. Wir zeigen $\phi'(x) = \psi'(x)$ für alle $x \in I$, woraus die Behauptung $\phi(b) = \psi(b)$ folgt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\psi'(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y) dy.$$

Weiter hat die Funktion $F(x, y) = \int_a^x f(\xi, y) d\xi$ die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x} = f \in C^0(I \times J)$, und aus Satz 9.2 folgt

$$\phi'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dy = \int_\alpha^\beta f(x, y) dy.$$

□

Alternativ kann der kleine Fubini auch durch Approximation mit Riemannschen Summen in beiden Variablen bewiesen werden.

Wir kommen jetzt zu einer Anwendung in der Variationsrechnung, und zwar betrachten wir Integrale des folgenden Typs:

$$\mathcal{F} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(u) = \int_a^b f(t, u(t), u'(t)) dt.$$

Abstrakt ist $\mathcal{F}$ eine reelle Funktion auf dem Raum $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Da es sich aber nicht um eine Funktion von endlich vielen reellen Variablen handelt, wie wir das bisher hatten, wird die Bezeichnung *Funktional* oder *Variationsintegral* benutzt. Das Funktional $\mathcal{F}$ ist dabei definiert durch die *Lagrangefunktion*

$$f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = f(t, x, v).$$

Hier ein paar Beispiele.

Beispiel 9.2 Die Bogenlänge von $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b |u'(t)| dt, \quad \text{also } f(t, x, v) = |v|.$$

Die Formel kann wie folgt motiviert werden: für eine Zerlegung $a = t_0 < \dots < t_N$ ergibt sich als Näherung der Bogenlänge

$$\sum_{i=1}^N |u(t_i) - u(t_{i-1})| \approx \sum_{i=1}^N |u'(t_i)| \Delta t_i.$$

Rechts steht aber die Riemannsche Summe für die Funktion $|u'(t)|$.

Beispiel 9.3 Soll der Kalorienbedarf beim Querfeldeinlauf ermittelt werden, so spielt nicht nur die Länge der Strecke eine Rolle, sondern auch die wechselnde Qualität des Bodens. Dies könnte durch eine Gewichtsfunktion als Faktor beschrieben werden:

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \omega(u(t)) |u'(t)| dt, \quad \text{also } f(t, x, v) = \omega(x)|v|.$$

Beispiel 9.4 Hier beschreibt $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ die Bahn eines Teilchens der Masse m in einem Kraftfeld mit Potential $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist dann $\frac{m}{2}|u'(t)|^2$ die kinetische und $V(u(t))$ die potentielle Energie des Teilchens zur Zeit t . Das Wirkungsintegral bildet die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, integriert auf I :

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left(\frac{m}{2} |u'(t)|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad \text{also } f(t, x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - V(x).$$

Funktionen, für die ein Funktional einen kleinsten oder größten Wert annimmt, sind natürlich von zentralem Interesse. Wir werden zeigen, dass eine extremale Funktion eine gewisse Differentialgleichung erfüllt, die Euler-Lagrange Gleichung. Unser Ansatz besteht darin, Variationen $u(\varepsilon, t)$ der extremalen Funktion $u(t)$ zu betrachten, die von einem Parameter abhängen:

$$u : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u = u(\varepsilon, t), \quad \text{wobei } u(0, \cdot) = u.$$

Ableitung der Variation nach dem Parameter ergibt das zugehörige Vektorfeld

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, t).$$

Lemma 9.1 (Erste Variation) Sei $f = f(t, x, v)$ Lagrangefunktion mit f und $D_v f$ stetig differenzierbar auf $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Für $u \in C^2((-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times I, \mathbb{R}^n)$ betrachte

$$\phi(\varepsilon) = \mathcal{F}(u(\varepsilon, \cdot)) = \int_a^b f(t, u(\varepsilon, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t)) dt.$$

Dann gilt mit $\varphi = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Formel

$$(9.2) \quad \frac{d\phi}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \langle L_f(u), \varphi \rangle dt + \left[\langle D_v f(t, u, u'), \varphi \rangle \right]_{t=a}^{t=b}.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und $L_f(u) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$L_f(u) = D_x f(t, u, u') - \frac{d}{dt} [D_v f(t, u, u')].$$

BEWEIS: Die Verkettung $(\varepsilon, t) \mapsto f(t, u(\varepsilon, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t))$ ist von der Klasse C^1 . Deshalb kann nach Satz 9.2 unter dem Integralzeichen differenziert werden. Es folgt mit der Kettenregel

$$\phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon}(0, t) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varepsilon \partial t}(0, t) \right) dt.$$

Mit $\varphi(t) = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(0, t)$ folgt, indem wir hinten die Ableitungen vertauschen,

$$(9.3) \quad \phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') \varphi_i(t) + \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \varphi'_i(t) \right) dt.$$

Schließlich mit partieller Integration im hinteren Term

$$\phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \right] \right)}_{= L_f(u)_i} \varphi_i dt + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') \varphi_i \right]_{t=a}^{t=b}.$$

Die Behauptung des Lemmas folgt, indem wir die Summen als Skalarprodukte schreiben. $\square$

Um eine optimale Funktion zu charakterisieren, müssen wir sie mit hinreichend vielen Variationen vergleichen. Das folgende Lemma gibt an, wieviele wir tatsächlich brauchen.

Lemma 9.2 Sei $I = (a, b)$. Für $f \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ gelte

$$(9.4) \quad \int_a^b \langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n).$$

Dann ist f die Nullfunktion.

BEWEIS: Wir zeigen das Lemma erst für $n = 1$. Es gibt eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\eta(s) = 0 \quad \text{für } |s| \geq 1, \quad \eta \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \eta = 1.$$

Ein konkretes Beispiel ist, bei passender Wahl von $a > 0$, die Funktion

$$\eta(s) = \begin{cases} a \exp \frac{1}{s^2-1} & \text{für } |s| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Angenommen es ist $\varepsilon := f(t_0) > 0$ für ein $t_0 \in I$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(t) \geq \varepsilon/2$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$. Betrachte die reskalierte Funktion

$$\eta_{t_0, \delta}(t) = \frac{1}{\delta} \eta\left(\frac{t - t_0}{\delta}\right).$$

Dann gilt $\eta_{t_0, \delta}(t) = 0$ für $|t - t_0| \geq \delta$, sowie $\int_{\mathbb{R}} \eta_{t_0, \delta} = 1$. Nach Voraussetzung

$$0 = \int_a^b f(t) \eta_{t_0, \delta}(t) dt = \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} f(t) \eta_{t_0, \delta}(t) dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b \eta_{t_0, \delta}(t) dt = \frac{\varepsilon}{2},$$

ein Widerspruch. Im Fall $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ liefert die Voraussetzung, für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$,

$$0 = \int_a^b \langle f, \varphi e_i \rangle = \int_a^b f_i \varphi.$$

Aus obigem folgt $f_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$, das Lemma ist bewiesen. $\square$

Satz 9.4 (Euler-Lagrange-Gleichungen) Sei $\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(t, u, u')$ ein Variationsintegral mit $f \in C^2(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(t, x, v)$. Sei $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ stationärer Punkt, d. h.

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u + \varepsilon \varphi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n).$$

Dann gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$L_f(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u, u') - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, u, u') = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Bemerkung. Es handelt sich um ein System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie man durch Ausdifferenzieren des zweiten Terms sieht.

BEWEIS: Die Randterme in (9.1) verschwinden, da $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ nach Voraussetzung. Die Aussage folgt dann aus den Lemmas 9.1 und 9.2. $\square$

Beispiel 9.5 (Bogenlänge) Wir betrachten die Bogenlänge aus Beispiel 9.2

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b |u'(t)| dt \quad \text{für } u \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n).$$

Die Lagrangefunktion und ihre Ableitung sind

$$f(t, x, v) = |v|, \quad D_v f(t, x, v) = \frac{v}{|v|} \quad \text{falls } v \neq 0.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten somit

$$L_f(u) = -\frac{d}{dt} \frac{u'}{|u'|} = 0.$$

Die Gleichung sagt aus, dass der Einheitstangentenvektor $\frac{u'}{|u'|}$ konstant ist. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $u(t)$ dann die Strecke von $u(a)$ nach $u(b)$ durchläuft. Allerdings wird zur Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen gebraucht, dass $u'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Beispiel 9.6 Bewegung eines Massenpunkts in einem konservativen Kraftfeld:

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left(\frac{m}{2} |u'|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad f(t, x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - V(x).$$

Das zugehörige Kraftfeld ist gegeben durch $F(x) = -\text{grad } V(x)$; das Minuszeichen ist in der Physik üblich. Dann ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x, v) = F_i(x), \quad \frac{\partial f}{\partial v_i}(t, x, v) = mv_i.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten somit $F(u) - mu'' = 0$, es sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen.

Viele interessante Parameterintegrale sind uneigentliche Integrale, zum Beispiel bei der Definition der Gammafunktion oder der Fouriertransformation. Aus Zeitgründen können wir darauf jetzt nicht eingehen, werden aber Parameterintegrale nochmals innerhalb der Theorie des Lebesgue-Integrals im dritten Semester aufgreifen.

10 Das Anfangswertproblem

In diesem Kapitel geht es um Prozesse, deren zukünftige oder vergangene Entwicklung durch eine gewöhnliche Differentialgleichung gesteuert wird. Ein Beispiel ist das natürliche Wachstum $x'(t) = \lambda x(t)$. Nach Analysis 1 ist die Lösung $x(t)$ mit Startwert $x(t_0) = x_0$ eindeutig durch die Exponentialfunktion gegeben, genauer gilt $x(t) = x_0 \exp \lambda(t - t_0)$. Hier wollen wir Anfangswertprobleme zu allgemeinen Wachstumsgesetzen betrachten.

Definition 10.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Eine Kurve $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I Intervall, heißt Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$ falls

$$(10.1) \quad x'(t) = f(x(t)) \text{ für alle } t \in I.$$

Es muss dabei $x(t) \in \Omega$ sein für alle $t \in I$. Gilt außerdem

$$(10.2) \quad x(t_0) = x_0 \text{ für gegebene } t_0 \in I, x_0 \in \Omega,$$

so ist x Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

Man kann sich vorstellen dass $x(t)$ die gesteuerte Bahn eines Fahrzeugs beschreibt, an jeder Stelle x ist die Geschwindigkeit $f(x)$ vorgegeben. Das Vektorfeld $f(x)$ wird auch als Richtungsfeld der Differentialgleichung bezeichnet. Hier ein paar Beispiele.

Beispiel 10.1 (natürliches Wachstum) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte das skalare Richtungsfeld $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x$. Das zugehörige Anfangswertproblem ist

$$x'(t) = \lambda x(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{für } t_0, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Wir haben dieses Problem in Analysis 1, Kapitel 11, diskutiert. Die eindeutige Lösung ist durch die Exponentialfunktion gegeben, genauer

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda(t - t_0)) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 10.2 (logistisches Wachstum) Das natürliche Wachstum $f(x) = \lambda x$ ist ein lineares Modell. Wir addieren jetzt einen quadratischen Term, also $f(x) = (\lambda - \mu x)x$ für $\lambda, \mu > 0$. Die resultierende Gleichung $x' = \lambda x - \mu x^2$ kann als Modell für die Vermehrung von Schafen auf einer Weide herhalten: bei wenig Schafen gibt es Zunahme aber bei zu vielen Schafen wieder Abnahme, wegen zu wenig Futter. Es gibt die zwei Gleichgewichtspunkte (stationäre Lösungen)

$$x(t) = 0 \quad \text{und} \quad x(t) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Wir wollen positive Lösungen betrachten, es gilt dann

$$f(x) = \mu x \left(\frac{\lambda}{\mu} - x \right) = \begin{cases} < 0 & \text{für } x > \lambda/\mu, \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \lambda/\mu. \end{cases}$$

Wie erwartet fällt die Lösung im Bereich $x > \lambda/\mu$ und wächst für $0 < x < \lambda/\mu$. Um sie auszurechnen machen wir den Ansatz $y(t) = e^{-\lambda t} x(t)$, es folgt

$$y'(t) = e^{-\lambda t} (-\lambda x(t) + \lambda x(t) - \mu x(t)^2) = -\mu e^{\lambda t} y(t)^2.$$

Das liefert weiter, wenn wir den Anfangswert bei $t = 0$ wählen,

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} = \int_0^t \frac{d}{dt} \frac{1}{y(t)} dt = \int_0^t \mu e^{\lambda t} dt = \frac{\mu}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1).$$

Mit $y(0) = x(0) = x_0$ ergibt sich die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + e^{-\lambda t} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\mu}{\lambda} \right)}.$$

In dieser Argumentation haben wir einiges ignoriert, zum Beispiel ob die Lösung Null werden kann, dann wäre die Rechnung gar nicht möglich. Das ist relativ typisch für den Umgang mit Differentialgleichungen, erst wird ad hoc ein Lösungskandidat ermittelt, dann im Nachhinein geprüft ob bzw. wo es sich tatsächlich um eine Lösung handelt, ob diese eindeutig ist und so weiter (*justification of the solution*).

Beispiel 10.3 (Räuber-Beute Modell von Volterra-Lotka) Hier kommt eine weitere Modifikation: die rechte Seite ist wieder Summe eines linearen und eines quadratischen Terms, aber es handelt sich um ein System von zwei Gleichungen. Es werden zwei Populationen betrachtet, sagen wir Schafe und Wölfe. Bei zuviel Wölfen ist die Vermehrungsrate der Schafe negativ, etwas zynisch ausgedrückt, dagegen ist bei zuwenig Schafen die Vermehrungsrate der Wölfe negativ. Dies führt auf die Gleichungen, mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$,

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x, \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y. \end{aligned}$$

Es handelt sich um zwei gekoppelte Gleichungen, deren Lösung nicht offensichtlich ist. Das Modell kann weiter verfeinert werden, zum Beispiel das Vorhandensein von Futter abhängig von der Jahreszeit abbilden und vieles mehr.

In Lösungskonzept oben und in den Beispielen hängt das Richtungsfeld nur vom Ort $x \in \Omega$ ab, man spricht von einer autonomen Gleichung bzw. autonomen System. Es ist aber auch denkbar, dass die Steuerung von außen beeinflusst wird. Das resultiert in einer zusätzlichen Abhängigkeit des Richtungsfelds von der Zeit. Der Lösungsbegriff muss dann etwas allgemeiner gefasst werden, wir werden mit diesem Konzept arbeiten.

Definition 10.2 Sei G offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t, x)$. Dann heißt $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, Lösung von $x' = f(\cdot, x)$, falls

$$(10.3) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in I \quad (\text{insbesondere } (t, x(t)) \in G).$$

Gilt außerdem

$$(10.4) \quad x(t_0) = x_0 \text{ für gegebenes } (t_0, x_0) \in G,$$

so heißt x Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

Mit $u(t) = t$ und $F(t, x) = (1, f(t, x))$ folgt daraus das autonome System

$$\frac{d}{dt}(u(t), x(t)) = (1, x'(t)) = F(u(t), x(t)), \quad (u(t), x(t))|_{t=t_0} = (t_0, x_0).$$

Umgekehrt impliziert dieses autonome System $u(t) = t$ und dann $x'(t) = f(t, x(t))$. Wir konzentrieren uns jetzt trotz der Äquivalenz auf das nichtautonome System.

Im allgemeinen kann das Lösungsintervall I nicht a priori vorgegeben werden. Unser erstes Ziel ist daher die Konstruktion einer lokalen Lösung konstruieren, die Frage der globalen Existenz werden wir später behandeln (siehe unten). Allgemein stellen sich folgende Fragen:

1. Ist eine Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt?
2. Existiert eine Lösung des Anfangswertproblems?
3. Wie hängt die Lösung vom Anfangswert x_0 und dem Vektorfeld f ab?

Wir behandeln die Eindeutigkeit und Existenz. Das folgende Beispiel zeigt, dass im Fall f stetig die Lösung nicht notwendig eindeutig ist.

Beispiel 10.4 Sei $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(t, x) = 2\sqrt{|x|}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x) \quad x(0) = 0$$

unendlich viele verschiedene Lösungen in $C^1(\mathbb{R})$, und zwar für $-\infty \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \infty$

$$x_{\alpha, \beta}(t) = \begin{cases} -(t - \alpha)^2 & \text{für } t < \alpha \\ 0 & \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \\ (t - \beta)^2 & \text{für } t > \beta. \end{cases}$$

Satz 10.1 (Eindeutigkeit) Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, und $f \in C^0(G)$ mit $D_x f \in C^0(G)$. Ist I offenes Intervall mit $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x), \quad x(t_0) = x_0$$

höchstens eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Wir setzen hier $D_x f$ stetig voraus, weil dies in den allermeisten Fällen gegeben ist und leicht zu verifizieren ist. Tatsächlich verwendet der Beweis des Satzes aber nur $f(t, x)$ lokal Lipschitz bezüglich der Variablen x . In vielen Texten wird man diese Voraussetzung finden. Im folgenden Lemma zeigen wir, dass die Lipschitzbedingung aus der Stetigkeit von $D_x f$ leicht folgt.

Lemma 10.1 Sei $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ mit $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Ist $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$, so gibt es zu $U_\varepsilon(t_0, x_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_\varepsilon(x_0) \subset\subset G$ eine Konstante $L \in [0, \infty)$ mit

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \text{für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in U_\varepsilon(t_0, x_0).$$

BEWEIS: Da $D_x f$ stetig ist und $U_\varepsilon(t_0, x_0)$ kompakt in G liegt, gibt es $L \in [0, \infty)$ mit $|D_x f| \leq L$ auf $U_\varepsilon(t_0, x_0)$. Die Aussage folgt nun direkt aus dem Schrankensatz, Satz 4.2. $\square$

BEWEIS: (von Satz 10.1) Seien $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Lösungen des Anfangswertproblems. Wir zeigen erst $x_1(t) = x_2(t)$ für $|t - t_0| < \delta$. Seien $\varepsilon > 0$, $L < \infty$ wie in Lemma 10.1. Wähle $\delta > 0$ sodass $(t, x_1(t)), (t, x_2(t)) \in U_\varepsilon(t_0, x_0)$ für $|t - t_0| < \delta$. Für $u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|^2$ folgt

$$\begin{aligned} |u'| &= 2|\langle x_1 - x_2, x_1' - x_2' \rangle| \\ &= 2|\langle x_1 - x_2, f(\cdot, x_1) - f(\cdot, x_2) \rangle| \\ &\leq 2|x_1 - x_2| |f(\cdot, x_1) - f(\cdot, x_2)| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq 2Lu. \end{aligned}$$

Damit gelten für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ die Ungleichungen

$$\frac{d}{dt}(e^{-2Lt}u(t)) = e^{-2Lt}(u' - 2Lu) \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(e^{2Lt}u(t)) = e^{2Lt}(u' + 2Lu) \geq 0.$$

Durch Integration ergibt sich die Abschätzung $u(t) \leq u(t_0)e^{2L|t-t_0|}$, das heißt

$$(10.5) \quad |x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| e^{L|t-t_0|} \quad \text{auf } (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Aus $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ folgt somit $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Betrachte nun die Menge M aller $t \in I$, $t > t_0$, mit $x_1(t) = x_2(t)$. Es gilt $t_* := \inf M \geq t_0 + \delta$. Angenommen es ist $M \neq \emptyset$, dann folgt $t_* \in I$. Mit Stetigkeit für $t \nearrow t_*$ gilt $x_1(t_*) = x_2(t_*)$, und t_* ist nicht der rechte Endpunkt von I . Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit $x_1(t) = x_2(t)$ auf $[t_*, t_* + \delta)$, also ist t_* nicht das Infimum von M , Widerspruch. $\square$

Tatsächlich liefert (10.5) zusätzlich eine Abschätzung von $|x_1(t) - x_2(t)|$ durch $|x_1(t_0) - x_2(t_0)|$, doch nun zur Frage der Existenz. Das folgende Beispiel zeigt, dass wir im allgemeinen nur eine zeitlich lokale Lösung erwarten können.

Beispiel 10.5 Betrachte $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) = x^2$. Das Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

hat die Lösung $x : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = 1/(1-t)$. Die Lösung ist nach rechts nicht fortsetzbar, denn es gilt $\lim_{t \nearrow 1} x(t) = \infty$.

In Analysis I, Satz 13.2, wurde gezeigt, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz stetig ist. Die folgende Konsequenz ist für uns jetzt wichtig.

Satz 10.2 (Vollständigkeit von $C^0(I, \mathbb{R}^n)$) Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall. Dann ist $C^0(I, \mathbb{R}^n)$, versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_I = \sup_{t \in I} |x(t)|$, ein Banachraum.

BEWEIS: Sei $x_k \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\|x_k - x_l\|_I < \varepsilon$ für $k, l > K$. Es folgt für $k, l > K$

$$|x_k(t) - x_l(t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t)$. Mit $l \rightarrow \infty$ folgt

$$|x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I \text{ und } k > K.$$

Somit gilt $\|x_k - x\|_I \leq \varepsilon$ für $k > K$. Also konvergiert x_k gleichmäßig gegen x , und es folgt $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ nach Analysis I, Satz 13.2. $\square$

Eine entscheidende Beobachtung zur Konstruktion der lokalen Lösung ist, dass das Anfangswertproblem als Integralgleichung geschrieben werden kann.

Lemma 10.2 Sei $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, $(t_0, x_0) \in G$, und I Intervall mit $t_0 \in I$. Für $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\{(t, x(t)) : t \in I\} \subset G$ sind äquivalent:

(a) $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ für alle } t \in I, \quad x(t_0) = x_0.$$

(b) $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ erfüllt die Gleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

BEWEIS: Aus (a) folgt (b) durch Integration von t_0 bis t . In (b) ist die Funktion $f(s, x(s))$ stetig. Aus dem Hauptsatz folgt $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $x'(t) = f(t, x(t))$. Ausserdem ist auch $x(t_0) = x_0$, also gilt (a). $\square$

Satz 10.3 (Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf) Sei $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, mit $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$, und $(t_0, x_0) \in G$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x) \text{ auf } I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad x(t_0) = x_0,$$

eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ besitzt.

BEWEIS: Wir formulieren das Problem als Fixpunktgleichung. Zu $(t_0, x_0) \in G$ seien $\varepsilon > 0$ und $L < \infty$ wie in Lemma 10.1 gewählt, und $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ mit $\delta \in (0, \varepsilon)$ zunächst beliebig. Betrachte im Banachraum $X = C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit Norm $\|\cdot\|_I$ die abgeschlossene Teilmenge $A = \{x \in X : \|x - x_0\|_I \leq \varepsilon\}$, sowie die Abbildung

$$F : A \rightarrow X, \quad F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Nach Lemma 10.2 ist die Gleichung $F[x] = x$ gleichbedeutend mit der Lösung des Anfangswertproblems. Die Existenz des Fixpunkts folgt mit Satz 7.1 von Banach, wenn wir zeigen:

(1) $F(A) \subset A$ (Selbstabbildung)

(2) $\|F(x) - F(y)\|_I \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_I$ für alle $x, y \in A$ (Kontraktion).

Da f stetig auf G ist und $U_\varepsilon(t_0, x_0) \subset\subset G$, gilt $|f| \leq M$ auf $U_\varepsilon(t_0, x_0)$. Für $x \in A$ folgt

$$|F[x](t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M\delta.$$

Weiter erhalten wir für $x, y \in A$ aus der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} |F[x](t) - F[y](t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in I} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \\ &\leq L\delta \sup_{s \in I} |x(s) - y(s)|. \end{aligned}$$

Für $\delta = \min(\varepsilon/M, 1/(2L))$ gelten die Bedingungen (1) und (2), der Satz ist bewiesen. $\square$

Wie gesagt haben wir im Beweis der Eindeutigkeit und Existenz nur benutzt, dass $f = f(t, x)$ stetig und lokal Lipschitz bezüglich der Variablen x ist. Die Bedingung $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$ impliziert das, und sie ist leicht zu checken.

Beispiel 10.6 Im Satz von Banach wird der Fixpunkt bekanntlich durch Iteration der Abbildung F mit einem geeigneten Startwert bestimmt. Wir wollen das für folgendes triviale Beispiel explizit durchrechnen:

$$x' = \alpha x, \quad x(0) = 1.$$

Hier ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = \alpha x$ und $t_0 = 0$. Die Iterationsvorschrift lautet

$$F[x](t) = 1 + \int_0^t \alpha x(s) ds.$$

Wählen wir als Startfunktion $x_0(t) \equiv 1$, so sind die ersten Iterationsschritte

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t \alpha ds = 1 + \alpha t, \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t \alpha(1 + \alpha s) ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}, \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t \alpha\left(1 + \alpha s + \frac{\alpha^2 s^2}{2}\right) ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6}. \end{aligned}$$

Durch Induktion sieht man ohne Mühe

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(\alpha t)^j}{j!}.$$

Das Verfahren konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gegen die Lösung $x(t) = e^{\alpha t}$, lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Jetzt stellt sich die Frage nach einer globalen Lösung. Zunächst gibt es immer eine eindeutige, maximale Lösung des Anfangswertproblems. Mit maximal ist gemeint, dass das Lösungsintervall weder nach rechts noch nach links vergrößert werden kann. Setze

$$\begin{aligned} t^+ &= \sup\{t \geq t_0 : \exists \text{ Lösung des AWP auf } [t_0, t)\}, \\ t^- &= \inf\{t \leq t_0 : \exists \text{ Lösung des AWP auf } (t, t_0]\}. \end{aligned}$$

Wegen der Kurzzeitexistenz, Satz 10.3, haben wir

$$-\infty \leq t^- < t_0 < t^+ \leq \infty.$$

Wir definieren nun eine Lösung $x \in C^1((t^-, t^+), \mathbb{R}^n)$. Wähle eine Folge $t_k \nearrow t^+$. Es gibt dann Lösungen x_k auf $[t_0, t_k)$, wir setzen $x = x_k$ auf $[t_0, t_k)$. Wegen Eindeutigkeit, Satz 10.1, gilt $x_l = x_k$ für $l > k$ auf $[t_0, t_k)$, somit sind die Lösungen konsistent und x ist wohldefiniert auf $[t_0, t^+)$. Entsprechend wird $x(s)$ auf $(t^-, t_0]$ definiert. Nach Definition von $t^\pm$ ist $x(s)$ die eindeutige, maximale Lösung. Die Zeiten $t^\pm$ werden als vorwärts bzw. rückwärts Lebensdauer der Lösung bezeichnet (Englisch: *forward/backward lifespan*).

Wir betrachten nun Anfangswertprobleme auf einem (t, x) -Zylinder $G = (\alpha, \beta) \times D$, und stellen die Frage: was muss passieren damit die Lösung vorzeitig den Geist aufgibt, damit also $t^+ < \beta$ bzw. $t^- > \alpha$ ist?

Satz 10.4 (Lebensdauer) Sei $f : (\alpha, \beta) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit D offen und $f, D_x f$ stetig. Es sei $x : (t^-, t^+) \rightarrow D$ die maximale Lösung von

$$x' = f(\cdot, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{für } (t_0, x_0) \in (\alpha, \beta) \times D.$$

Ist dann $t^+ < \beta$, so verlässt $x(t)$ für $t \nearrow t^+$ jedes Kompaktum $K \subset D$, das heißt es gilt $x(t) \notin K$ für t hinreichend nahe t^+ . Entsprechend im Fall $t^- > \alpha$.

Bemerkung. Im Fall $D = \mathbb{R}^n$ besagt der Satz

$$t^+ < \beta \Rightarrow \lim_{t \nearrow t^+} |x(t)| = \infty \quad \text{bzw.} \quad t^- > \alpha \Rightarrow \lim_{t \searrow t^-} |x(t)| = \infty.$$

BEWEIS: Sei $t^+ < \beta$ und $K \subset D$ kompakt. Angenommen es gibt ein $\tau < t^+$ mit $x(t) \in K$ für alle $t \in [\tau, t^+)$. Da f stetig, ist $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in [\tau, t^+], x \in K\} < \infty$ und es folgt

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t)) dt \right| \leq M |t_2 - t_1| \quad \text{für alle } t_{1,2} \in [\tau, t^+).$$

Also existiert $x^+ = \lim_{t \nearrow t^+} x(t) \in K$. Nach Satz 10.3 gibt es auf einem Intervall $I = (t^+ - \delta, t^+ + \delta)$ eine Lösung y von

$$y' = f(\cdot, y) \text{ auf } I, \quad y(t^+) = x^+.$$

Wegen Eindeutigkeit sind x und y links von t^+ gleich. Durch Zusammensetzen kriegen wir eine Lösung $\tilde{x}$ der Differentialgleichung auf $[t_0, t^+ + \delta)$ mit Anfangswert $\tilde{x}(t_0) = x_0$, im Widerspruch zur Maximalität von t^+ .

Der Satz ist damit noch nicht gezeigt, denn die indirekte Annahme oben schließt nicht ein oszillierendes Verhalten aus, bei dem $x(t)$ für $t \nearrow t^+$ immer wieder nach K zurückkommt. Aber angenommen es gibt $t_k \nearrow t^+$ mit $x(t_k) \in K$. Für $\varrho > 0$ hinreichend klein ist dann $\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \varrho\}$ kompakte Teilmenge von D , und es gibt eine Schranke $|f(t, x)| \leq \tilde{M}$ auf $[t_0, t^+] \times \tilde{K}$. Wie oben bewiesen ist dann

$$\tilde{t}_k := \sup\{t \geq t_k : x([t_k, t]) \subset \tilde{K}\} < t^+.$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$0 < \varrho \leq |x(\tilde{t}_k) - x(t_k)| = \left| \int_{t_k}^{\tilde{t}_k} f(t, x(t)) dt \right| \leq \tilde{M}(\tilde{t}_k - t_k),$$

Mit $k \rightarrow \infty$ gilt $t_k, \tilde{t}_k \nearrow t^+$, im Widerspruch zu $\varrho > 0$. □

Das Gegenbeispiel zur globalen Existenz beruhte auf dem quadratischen Wachstum der rechten Seite $f(x) = x^2$. Wir wollen nun ein globales Existenzresultat zeigen, dazu folgende Abschätzung.

Lemma 10.3 (Gronwall) Für die reelle Funktion $u \in C^0([t_0, t_1])$ gelte

$$u(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1],$$

wobei $a, b \in C^0([t_0, t_1])$ und $a \geq 0$. Dann folgt

$$u(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) a(s)b(s) ds \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

BEWEIS: Wir setzen $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ und $f(t) = \int_{t_0}^t a(s)u(s) ds$. Nach Voraussetzung gilt dann $u(t) \leq b(t) + f(t)$. Weiter folgt mit $a(t) \geq 0$

$$\frac{d}{dt}(e^{-A(t)}f(t)) = e^{-A(t)}a(t)(u(t) - f(t)) \leq e^{-A(t)}a(t)b(t).$$

Integration von t_0 bis t liefert, da $f(t_0) = 0$,

$$e^{-A(t)}f(t) \leq \int_{t_0}^t e^{-A(s)}a(s)b(s) ds.$$

Multipliziere mit $e^{A(t)}$ und verwende nochmal $u(t) - b(t) \leq f(t)$, sowie

$$e^{A(t)}e^{-A(s)} = e^{A(t)-A(s)} = \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right).$$

Die Ungleichung folgt. □

Satz 10.5 (Langzeitexistenz bei linearem Wachstum) Sei $f : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f, D_x f$ stetig und $-\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq \infty$. Es gebe $a, b \in C^0((\alpha, \beta))$ mit $a \geq 0$, so dass gilt:

$$|f(t, x)| \leq a(t)|x| + b(t) \quad \text{für alle } t \in (\alpha, \beta), x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist das Anfangswertproblem $x' = f(\cdot, x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, auf ganz (α, β) lösbar.

BEWEIS: Für $t \in [t_0, t^+)$ gilt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq |x_0| + \int_{t_0}^t (a(s)|x(s)| + b(s)) ds,$$

das heißt

$$|x(t)| \leq B(t) + \int_{t_0}^t a(s)|x(s)| ds \quad \text{mit } B(t) = |x_0| + \int_{t_0}^t b(s) ds.$$

Mit dem Lemma von Gronwall bekommen wir für alle $t \in [t_0, t^+)$ die Abschätzung

$$(10.6) \quad |x(t)| \leq B(t) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) a(s)B(s) ds.$$

Die Funktionen $a(t)$ und $B(t)$ sind lokal beschränkt auf (α, β) . Wäre $t^+ < \beta$, so folgt aber $|x(t)| \rightarrow \infty$ mit $t \nearrow t^+$ nach Satz 10.4, ein Widerspruch. Der Beweis von $t^- = \alpha$ ist analog. □

11 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten hier das Anfangswertproblem

$$(11.1) \quad x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \text{ für } t \in I = (\alpha, \beta), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dabei ist $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sowie $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allerdings ist es nützlich, auch komplexwertige Koeffizienten und Lösungen zuzulassen. Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ist ein komplexes $n \times n$ System äquivalent zu einem reellen $(2n) \times (2n)$ System, das heißt unsere Existenz- und Eindeigkeitstheorie ist voll anwendbar.

Wir betrachten erst das homogene Problem, also $b(t) \equiv 0$. Der Fall $n = 1$ kann die Lösung leicht berechnet werden: ist $x_0 = 0$, so ist $x(t)$ die Nullfunktion. Ist $x_0 > 0$, so folgt $x(t) > 0$ für alle $t \in I$ und

$$\frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = A(t), \quad \text{also} \quad x(t) = x_0 \exp \int_{t_0}^t A(s) ds.$$

Im Fall $x_0 < 0$ ergibt sich dieselbe Formel. Für Systeme, also $n \geq 2$, gibt es kein entsprechendes Verfahren, das die Lösung explizit angibt.

Satz 11.1 (Anfangswertisomorphismus) Sei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist die Menge $L_A = \{x \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : x' = Ax \text{ auf } I\}$ ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum, genauer ist für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung

$$\delta_{t_0} : L_A \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

BEWEIS: Mit $x, y \in L_A$ ist auch $\lambda x + \mu y \in L_A$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, denn

$$(\lambda x + \mu y)' = \lambda x' + \mu y' = \lambda Ax + \mu Ay = A(\lambda x + \mu y).$$

Also ist L_A ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$, und die Abbildung $\delta_{t_0} : L_A \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist wohldefiniert und linear. Da $|A(t)x| \leq |A(t)||x|$, gibt es nach Satz 10.5 zu jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x' = Ax$ auf ganz I mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$, das heißt die Abbildung δ_{t_0} ist surjektiv. Die Eindeutigkeit, Satz 10.1, besagt dass δ_{t_0} auch injektiv ist. $\square$

Eine Basis von L_A bezeichnet man als Fundamentalsystem der Gleichung $x' = Ax$. Explizit erhält man ein solches Fundamentalsystem, indem man die Gleichung zu linear unabhängigen Anfangsdaten löst, etwa $x_j(t_0) = e_j$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis ist.

Für n beliebige Lösungen $x_j : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung impliziert der Satz folgende Alternative: entweder bilden die Vektoren $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ für jedes $t \in I$, oder es gibt Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle Null, mit $\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) = 0$ für alle $t \in I$. Wir können n Funktionen $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ zu einer matrixwertigen Funktion $X : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ zusammenfassen, so dass x_j die j -te Spalte von X ist. Es gilt dann

$$x'_j = Ax_j \text{ für } j = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad X' = AX.$$

Rechts steht die Matrixmultiplikation. Die Äquivalenz folgt daraus, dass die Ableitung von X spaltenweise berechnet werden kann, und dass die j -te Spalte von AX gleich Ax_j ist. Die Tatsache, dass die Vektoren $x_1(t), \dots, x_n(t)$ für Lösungen des Systems $x' = Ax$ entweder für alle $t \in I$ oder für kein $t \in I$ linear abhängig sind, ergibt sich alternativ aus folgender Formel.

Satz 11.2 (Formel von Liouville) Sei $X \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ Lösung von $X' = AX$ auf I , wobei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$. Dann gilt für beliebiges $t_0 \in I$

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

BEWEIS: Ist $\det X(t_0) = 0$, so gilt $\det X(t) = 0$ für alle $t \in I$ nach Satz 11.1, und die Formel trifft zu. Andernfalls ist $\det X(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und es gilt die allgemeine Formel

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr} (X(t)^{-1} X'(t)).$$

Setzen wir $X' = A(t)X(t)$ ein und beachten $\operatorname{tr} (X^{-1}AX) = \operatorname{tr} (XX^{-1}A) = \operatorname{tr} (A)$, so folgt

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr} (A(t)).$$

Die Behauptung folgt aus der Lösungsformel für $n = 1$. □

Wir kommen nun zum Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Sind x_1, x_2 zwei Lösungen, so ist $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $x' = Ax$, das heißt es gilt $x_2 \in x_1 + L_A$, ähnlich wie bei linearen Gleichungssystemen. Wir machen zur Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$x(t) = X(t)y(t), \quad \text{wobei } X(t) \text{ Fundamentalsystem mit } X(t_0) = E_n.$$

Ein solches Fundamentalsystem gibt es nach Satz 11.1. Wir berechnen

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)y(t) + X(t)y'(t) = A(t)X(t)y(t) + X(t)y'(t) = A(t)x(t) + X(t)y'(t), \\ x(t_0) &= X(t_0)y(t_0) = y(t_0). \end{aligned}$$

Geben wir noch den Anfangswert $x(t_0) = x_0$ vor, so ergibt sich $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s) ds$. Damit ist gezeigt:

Satz 11.3 (Variation der Konstanten) Betrachte für $x \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ das Problem

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \text{ auf } I, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n,$$

wobei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ und $b \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$. Sei $X \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung mit $X(t_0) = E_n$. Dann lautet die eindeutige Lösung

$$x(t) = X(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s) ds \right).$$

Wir spezialisieren nun auf lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. Ein Fundamentalsystem kann dann mit der Exponentialabbildung für Matrizen hingeschrieben werden. Diese ist durch die Exponentialreihe definiert:

$$\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad \exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, genauer gilt für $|A| \leq R$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{j=k}^m \frac{A^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{|A|^j}{j!} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{R^j}{j!} < \varepsilon \quad \text{für } k \geq K(R, \varepsilon).$$

Also ist die Konvergenz für $|A| \leq R$ gleichmäßig, und $\exp$ ist stetig auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Satz 11.4 (Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten) Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, X(t) = \exp(tA),$$

die Lösung des Anfangswertproblems $X' = AX$, $X(0) = E_n$. Die Spaltenvektoren $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, sind ein Fundamentalsystem für $x' = Ax$ mit Anfangswerten $x_j(0) = e_j$.

BEWEIS: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Wir berechnen durch gliedweise Differentiation

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1} A^j}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^{j+1}}{j!} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = AX(t).$$

Die Ableitung war erlaubt, die differenzierte Reihe konvergiert gleichmäßig für $|t| \leq T$:

$$\left| \sum_{j=k}^m \frac{t^j A^{j+1}}{j!} \right| \leq |A| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(|t| |A|)^j}{j!} \leq |A| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(T|A|)^j}{j!} < \varepsilon \quad \text{für } k \geq K(|A|, T, \varepsilon).$$

□

Folgerung 11.1 Die Matrix-Exponentialabbildung hat folgende Eigenschaften:

- (a) $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ und $\exp(0) = E_n$.
- (b) $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$.
- (c) $\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1}$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $S \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$.
- (d) $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$, falls $[A, B] = AB - BA = 0$.

BEWEIS: Es ist $\exp(0) = E_n$ nach Definition. Nach Satz 11.4 und Satz 11.1 ist $\exp(A) = \exp(tA)|_{t=1}$ invertierbar. Gleichung (b) ist Satz 11.2, angewandt auf $X(t) = \exp(tA)$. Für (c) argumentieren wir mit dem Eindeigkeitsatz: die Funktionen $t \mapsto \exp(tSAS^{-1})$ sowie $t \mapsto S \exp(tA) S^{-1}$ lösen beide die Gleichung $X' = (SAS^{-1})X$ zum Anfangswert $X(0) = E_n$. Also sind sie gleich, für $t = 1$ folgt (c). Bei (d) gehen wir ähnlich vor, aber in zwei Schritten: zunächst sind sowohl $t \mapsto \exp(tA)B$ als auch $t \mapsto B \exp(tA)$ Lösungen des Anfangswertproblems $X' = AX$ mit $X(0) = B$, wobei für die zweite Funktion $[A, B] = 0$ benutzt wird:

$$\frac{d}{dt}(B \exp(tA)) = BA \exp(tA) = A(B \exp(tA)).$$

Das zeigt $\exp(A)B = B \exp(A)$. Weiter gilt für $X(t) = \exp(tA) \exp(tB)$

$$\begin{aligned} X'(t) &= A \exp(tA) \exp(tB) + \exp(tA) B \exp(tB) \\ &= (A+B) \exp(tA) \exp(tB) \\ &= (A+B)X(t). \end{aligned}$$

Dies zeigt $X(t) = \exp t(A+B)$, insbesondere $\exp(A) \exp(B) = \exp(A+B)$. □

Die Eigenschaften (c) und (d) können auch direkt aus der Reihendarstellung hergeleitet werden. Dabei muss $\exp(A) \exp(B)$ mit dem Cauchyprodukt berechnet werden, vgl. Analysis I, Satz 15.7, wobei die Voraussetzung $[A, B] = 0$ wesentlich ist.

Betrachte nun den Fall, wenn A über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, das heißt es gibt eine Basis $v_1, \dots, v_n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die Funktionen $x_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ bilden dann ein Fundamentalsystem, denn es gilt

$$x'_j(t) = \lambda_j e^{\lambda_j t} v_j = e^{\lambda_j t} A v_j = A x_j(t).$$

In der Eigenvektorbasis entkoppelt das System also in n skalare Gleichungen, deren Lösungen durch Exponentialfunktionen gegeben sind. Leider ist nicht jede Matrix diagonalisierbar. In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass es über $\mathbb{C}$ jedenfalls immer eine Basis gibt, so dass die zugehörige Matrix Jordansche Normalform hat, das heißt sie besteht aus Blöcken der Form

$$J_m(\lambda) = \lambda E_m + N_m \quad \text{mit } N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $N_m^{m+1} = 0$, deshalb sind die Potenzen und die Exponentialreihe der $J_m(\lambda)$ leicht berechenbar. Wir wollen das aber nicht allgemein durchführen, sondern betrachten ein klassisches Beispiel.

Die Auslenkung eines schwingungsfähigen Systems (Oszillators) mit Eigenfrequenz $\omega_0 > 0$ und Reibungskoeffizient $\beta \geq 0$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0.$$

Wir schreiben die Gleichung äquivalent in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix A ist $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2$. Wir betrachten erst den Fall $\beta \neq \omega_0$. Die Matrix A hat dann zwei verschiedene, eventuell komplexe, Eigenwerte $\lambda^\pm$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v^\pm$, und zwar

$$\lambda^\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}, \quad v^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^\pm \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^+ & \lambda^- \end{pmatrix}.$$

Mit Folgerung 11.1(c) ergibt sich

$$\exp(tA) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda^+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda^- t} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Für das System erster Ordnung haben wir also das Fundamentalsystem

$$\exp(tA) v^\pm = e^{\lambda^\pm t} v^\pm = e^{\lambda^\pm t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^\pm \end{pmatrix}.$$

Im Fall $\beta > \omega_0$ erhalten wir zwei Lösungen, die exponentiell und monoton fallen (Kriechfall):

$$x^\pm(t) = e^{-\beta^\pm t} \quad \text{mit } \beta^\pm = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in (0, 2\beta).$$

Im Fall $\beta < \omega_0$ bekommen wir die komplexen Lösungen

$$x^\pm(t) = e^{-\beta t} e^{\pm i \omega t} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \in (0, \omega_0].$$

Durch Kombination erhalten wir die reellen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-\beta t} \cos \omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Auch diese fallen exponentiell, aber sie oszillieren mit Periode $2\pi/\omega$ (Schwingfall).

Es bleibt der Fall $\omega_0 = \beta$. Das charakteristische Polynom hat dann nur die Nullstelle $\lambda = -\beta$, und A ist nicht diagonalisierbar, sonst wäre A ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Wir wählen die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat A Jordansche Normalform, es gilt

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen mit der Binomischen Formel

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = 0 \Rightarrow (\lambda E_2 + N)^k = \lambda^k E_2 + k \lambda^{k-1} N.$$

Also erhalten wir

$$\exp(tA) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} S^{-1},$$

und das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \exp(tA)v_1 &= e^{\lambda t} v_1 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \\ \exp(tA)v_2 &= t e^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t} v_2 = t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Gleichung zweiter Ordnung bekommen wir, mit $\lambda = -\beta$,

$$x_1(t) = e^{-\beta t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = t e^{-\beta t}.$$

Man spricht vom aperiodischen Grenzfall. Die zweite Lösung fällt nicht genau wie $e^{-\beta t}$, sondern es kommt ein Polynom (hier linear) als Faktor hinzu.

12 Separation der Variablen

In diesem kurzen Kapitel geht es einen speziellen Typ einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung leicht explizit bestimmt werden kann. Das Lösungsverfahren ist Standard und wird oft benutzt.

Satz 12.1 (Separation der Variablen) Seien $f(t) \in C^0(I)$, $g(x) \in C^0(J)$, wobei I, J offene Intervalle und $g(x) \neq 0$. Wir betrachten für $(t_0, x_0) \in I \times J$

$$(12.1) \quad x'(t) = \frac{f(t)}{g(x(t))} \text{ für } t \in I, x(t_0) = x_0 \quad \text{mit } (t_0, x_0) \in I \times J.$$

Seien $F \in C^1(I)$, $G \in C^1(J)$ die Stammfunktionen von f, g mit $F(t_0) = G(x_0) = 0$. Gilt $F(I) \subset G(J)$, so ist die $x(t) = G^{-1}(F(t))$ Lösung des Anfangswertproblems.

Bemerkung. $G(J)$ ist offen nach Analysis 1, Satz 8.2. Da $F(t_0) \in G(J)$, ist die Bedingung $F(I) \subset G(J)$ erfüllt, wenn I hinreichend klein gewählt wird.

BEWEIS: Es gilt $x = G^{-1} \circ F \in C^1(I)$, und $x(t_0) = G^{-1}(0) = x_0$. Weiter für $t \in I$

$$x'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1} \circ F(t))} F'(t) = \frac{1}{g(x(t))} f(t).$$

□

Es ist üblich und sinnvoll, die Methode der Separation der Variablen zunächst sorglos anzuwenden. Der Gültigkeitsbereich der Lösung kann dann a posteriori bestimmt werden, auch kann geprüft werden, ob der Ansatz alle möglichen Lösungen liefert. Für die Anwendung ist folgendes Kochrezept hilfreich:

- (1) Separation der Variablen: schreibe die Gleichung in der Form

$$g(x) dx = f(t) dt.$$

- (2) Integriere links von x_0 bis x , rechts von t_0 bis t :

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(y) dy = \int_{t_0}^t f(s) ds = F(t).$$

- (3) Löse nach $x = x(t)$ auf.

Beispiel 12.1 Betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Wir schreiben $x^{-2} dx = dt$. Integration von x_0 bis x bzw. von $t = 0$ bis t ergibt

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t.$$

Auflösen nach x ergibt

$$x(t) = \left(\frac{1}{x_0} - t \right)^{-1}.$$

Das maximale Existenzintervall ist $(-\infty, \frac{1}{x_0})$. Im Fall $x_0 < 0$ erhalten wir die gleiche Formel, das maximale Intervall ist dann $(\frac{1}{x_0}, \infty)$. Im Fall $x_0 = 0$ kann die Lösung $x(t) \equiv 0$ nicht mit der Methode der Separation gefunden werden.

Bei Euler-Lagrange Gleichungen spielen Erhaltungssätze eine zentrale Rolle.

Satz 12.2 (Energieerhaltungssatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, v)$, also unabhängig von t . Dann gilt für eine Lösung $x \in C^2(I, \Omega)$ der Euler-Lagrange Gleichungen der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} [\langle D_v f(x, x'), x' \rangle - f(x, x')] = 0.$$

BEWEIS: Wir berechnen in Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_j}(x, x') x'_j - f(x, x') \right] = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_j}(x, x') - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, x') \right)}_{=0} x'_j = 0$$

□

Bei eindimensionalen Variationsproblemen führt der Energieerhaltungssatz auf eine skalare Differentialgleichung erster Ordnung. Durch Separation der Variablen kann dann gegebenenfalls eine explizite Lösung der Euler-Lagrange Gleichung gefunden werden.

Beispiel 12.2 Betrachte das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left(\frac{m}{2} |u'(t)|^2 - V(u(t)) \right) dt.$$

Dabei beschreibt $u(t)$ die Bewegung eines Teilchens der Masse $m > 0$ im Kraftfeld $F(x) = -\text{grad } V(x)$, siehe Beispiel 9.6. Wir berechnen für $f(x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - V(x)$

$$\langle D_v f(x, x'), x' \rangle - f(x, x') = \langle m x', x' \rangle - \left(\frac{m}{2} |x'|^2 - V(x) \right) = \frac{m}{2} |x'|^2 + V(x).$$

Es folgt für Lösungskurven der Energieerhaltungssatz

$$\frac{m}{2} |x'|^2 + V(x) = E \quad (= \text{Konstante}).$$

Beispiel 12.3 (Das Katenoid) Wird der Graph einer Funktion $u : I \rightarrow (0, \infty)$, $u = u(x)$, um die x -Achse rotiert, so hat die Rotationsfläche den Inhalt

$$\mathcal{A}(u) = 2\pi \int_I u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Sei $u(x)$ eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung. Nach Satz 12.2 gilt dann

$$\frac{u u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} u' - u \sqrt{1 + (u')^2} = -a \quad (= \text{Konstante}).$$

Der Einfachheit halber sei $u'(0) = 0$ und $u'(x) > 0$ für $x > 0$. Dann folgt $u(0) = a$ und

$$\frac{du}{dx} = \left(\left(\frac{u}{a} \right)^2 - 1 \right)^{1/2}.$$

Jetzt integriere von $x = 0$ bis x , sowie von $u(0) = a$ bis $u(x)$:

$$x = \int_a^{u(x)} \left(\left(\frac{s}{a} \right)^2 - 1 \right)^{-1/2} ds = a \operatorname{Arcosh} \frac{u(x)}{a}.$$

Auflösen nach $u(x)$ ergibt $u(x) = a \cosh \frac{x}{a}$. Diese Kurve beschreibt gleichzeitig die Gestalt einer hängenden Kette, deshalb heißt sie Kettenlinie oder Katenoid. Die zugehörige Rotationsfläche ist das Katenoid, es ist ein Beispiel für eine Minimalfläche.

13 Kurvenintegrale und Gradientenfelder

Beim einer Radtour vom Mathematischen Institut auf den Schauinsland wird Arbeit gegen die Gravitationskraft verrichtet. Es ist dabei egal, welcher Weg gewählt wird: die Gravitationskraft zeigt konstant nach unten, daher entspricht die Arbeit einfach dem Zugewinn an Höhe bzw. Lageenergie. Felder mit einem solchen Erhaltungsgesetz heißen konservativ. Wir wollen notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, die konservative Felder charakterisieren.

Die Regel zur Berechnung der Arbeit lautet *Kraft längs Weg*. Wir betrachten die Klasse $PC^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ der stückweise C^1 -Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, das heißt γ ist stetig und es gibt eine Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_N = b$ mit $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$.

Definition 13.1 (Kurvenintegral) Sei $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Das Kurvenintegral von F längs $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ ist

$$\int_{\gamma} F \cdot dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

In der Physik steht $F(x)$ für ein Kraftfeld und dx für das vektorielle Wegelement. Die Notation ist jedoch rein symbolisch, zur Berechnung des Kurvenintegrals ist nur das Riemannintegral auf der rechten Seite relevant. Dabei ist die Merkregel nützlich, dass $x = \gamma(t)$ und $dx = \gamma'(t) dt$ ersetzt wird. In folgendem Lemma betrachten wir stetige Vektorfelder und stückweise C^1 -Kurven, also ist das Kurvenintegral jeweils definiert.

Lemma 13.1 Das Kurvenintegral auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat folgende Eigenschaften:

(a) *Linearität:* für Vektorfelder $F_{1,2} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\gamma} (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot dx = \lambda_1 \int_{\gamma} F_1 \cdot dx + \lambda_2 \int_{\gamma} F_2 \cdot dx.$$

(b) *Additivität bei Zerlegungen:* ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ und $a = t_0 < \dots < t_N = b$ eine beliebige Zerlegung, so folgt mit $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$

$$\int_{\gamma} F \cdot dx = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot dx.$$

(c) *Invarianz bei Umparametrisierungen:* sei $\gamma : I_1 \rightarrow \Omega$ und $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ sei diffeomorph. Dann gilt, je nach Vorzeichen von φ' ,

$$\int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot dx = \pm \int_{\gamma} F \cdot dx.$$

BEWEIS: (a) und (b) folgen aus der Definition und den Eigenschaften des Riemannintegrals. Für (c) sei $I_1 = [a_1, b_1]$ und $I_2 = [a_2, b_2]$. Mit der Substitution $\varphi(t) = s$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} F \cdot dx &= \int_{a_2}^{b_2} \langle (F \circ \gamma \circ \varphi)(t), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle dt \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \langle F \circ \gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \langle (F \circ \gamma)(s), \gamma'(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Ist $\varphi' > 0$ so gilt $\varphi(a_2) = a_1$ und $\varphi(b_2) = b_1$, wir bekommen das Pluszeichen. Ist $\varphi' < 0$ so sind die Grenzen vertauscht und es gilt das Minuszeichen. $\square$

Definition 13.2 (konservatives Feld) Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt konservativ oder Gradientenfeld, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit

$$F = \text{grad } \varphi \quad \Leftrightarrow \quad F_i = \partial_i \varphi \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Die Funktion φ heißt Stammfunktion oder Potential von F .

Hinweis. In der Physik ist die Wahl $F = -\text{grad } \varphi$ üblich, warum auch immer.

Beispiel 13.1 (Gravitationsfelder) In folgenden Beispielen gilt $F = -\text{grad } \varphi$:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & F(x) &= -C e_3 & \varphi(x) &= C x_3 \\ F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & F(x) &= C \frac{x}{|x|^3} & \varphi(x) &= \frac{C}{|x|}. \end{aligned}$$

Das erste Feld beschreibt approximativ die Gravitation nahe der Erdoberfläche, das zweite ist das Gravitationsfeld eines beliebigen, rotationssymmetrischen Körpers, nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

Lemma 13.2 (Eindeutigkeit der Stammfunktion) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt (wenn existent), bis auf eine additive Konstante.

BEWEIS: Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$ Stammfunktionen von F , so folgt

$$\text{grad } (\varphi_2 - \varphi_1) = \text{grad } \varphi_2 - \text{grad } \varphi_1 = F - F = 0.$$

Also ist $\varphi_2 - \varphi_1$ konstant nach Satz 4.1, das heißt $\varphi_2 = \varphi_1 + c$. $\square$

Wir zeigen jetzt, dass Existenz einer Stammfunktion und Wegunabhängigkeit äquivalent sind.

Satz 13.1 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Für ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) F ist ein Gradientenfeld.
- (b) Für jede geschlossene PC^1 -Kurve in Ω ist $\int_\gamma F \cdot dx = 0$.
- (c) Für zwei PC^1 -Kurven in Ω mit gleichen Anfangs- und Endpunkten ist

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx.$$

BEWEIS: Ist $F = \text{grad } \varphi$ in Ω , so gilt nach Kettenregel für alle $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$

$$(13.1) \quad \int_\gamma F \cdot dx = \int_a^b \langle \text{grad } \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt = [\varphi(x)]_{x=\gamma(a)}^{x=\gamma(b)}.$$

Das Integral ist also gleich für zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt; für geschlossene Wege ist es Null.

Für (b) $\Rightarrow$ (c) seien $\gamma_i \in PC^1([a_i, b_i], \Omega)$, $i = 1, 2$, mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(b_1 + b_2 - t) & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2 \end{cases}$$

geschlossen und stückweise C^1 , und aus (b) ergibt sich mit Lemma 13.1

$$0 = \int_{\gamma} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx - \int_{\gamma_2} F \cdot dx.$$

Für (c) $\Rightarrow$ (a) sei $x_0 \in \Omega$ fest. Zu $x \in \Omega$ wählen wir $\gamma_x \in PC^1([0, 1], \Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$, siehe Aufgabe 2, Serie 2, für die Existenz von γ . Wäre φ Stammfunktion von F mit $\varphi(x_0) = 0$, so folgt aus (13.1)

$$(13.2) \quad \varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot dx.$$

Umgekehrt definieren wir $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch (13.2) und zeigen, dass dies eine Stammfunktion liefert. Zu $x \in \Omega$ sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Wir erhalten eine PC^1 -Kurve von x_0 nach $x + he_j$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, indem wir γ_x zusammensetzen mit

$$c : [0, 1] \rightarrow B_\varepsilon(x), \quad c(t) = x + the_j.$$

Nach Voraussetzung (c) und Lemma 13.1 gilt für $h \neq 0$

$$\frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_c F \cdot dx = \int_0^1 \langle F(x + the_j), e_j \rangle dt \rightarrow F_j(x) \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

Also gilt $\partial_j \varphi = F_j$ für $j = 1, \dots, n$. □

Die folgende Bedingung ist offensichtlich notwendig für die Existenz einer Stammfunktion.

Satz 13.2 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \text{in } \Omega.$$

BEWEIS: Ist $F = \text{grad } \varphi$, so folgt $\varphi \in C^2(\Omega)$ und mit Schwarz, Satz 2.2, gilt

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i.$$

□

Für $n = 3$ lässt sich die Bedingung schreiben als $\text{rot } F = 0$, wobei

$$\text{rot } F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

Beispiel 13.2 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (-y, x)$, hat auf keiner offenen Teilmenge eine Stammfunktion, denn es gilt $\partial_1 F_2 = 1$, dagegen $\partial_2 F_1 = -1$.

Das folgende Beispiel ist interessant.

Beispiel 13.3 (Winkelvektorfeld) Wir betrachten

$$W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, W(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

W ist rotationsfrei, siehe Satz 13.2, denn es gilt

$$\partial_1 W_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_2 W_1.$$

Weiter berechnen wir, dass W auf der Menge $\{y > 0\}$ die folgende Stammfunktion hat:

$$\varphi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \rightarrow (0, \pi), \varphi(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Betrachte nun eine Kurve $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Polardarstellung, also $\gamma(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ mit $r, \theta \in C^1(I)$. Wir berechnen

$$(13.3) \quad \int_{\gamma} W \cdot dx = \int_a^b \left\langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle dt = \theta(b) - \theta(a).$$

Speziell sei $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$, $t \in [0, 2\pi]$, mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist γ geschlossen und es gilt

$$(13.4) \quad \int_{\gamma} W \cdot dx = 2\pi n \quad (\neq 0 \text{ für } n \neq 0).$$

Mit Satz 13.1 folgt, dass W keine Stammfunktion auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat.

Das Beispiel zeigt, dass die Rotationsfreiheit eines Vektorfelds, siehe Satz 13.2, nicht hinreichend ist für die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals. Es stellt sich die Frage, ob das Kurvenintegral zumindest gleich bleibt, wenn eine Kurve stetig deformiert wird.

Definition 13.3 (Homotopie) Eine Homotopie in Ω zwischen $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a, b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([a, b] \times [0, 1], \Omega)$ mit $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ und $\gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$. Speziell:

- Homotopie mit festen Endpunkten: $\gamma(a, t), \gamma(b, t)$ konstant für $t \in [0, 1]$ (falls γ_0, γ_1 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt)
- geschlossene Homotopie: $\gamma(a, t) = \gamma(b, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ (falls γ_0, γ_1 geschlossen).

Im folgenden Lemma berechnen wir die Ableitung des Kurvenintegrals längs Homotopien, sofern diese ausreichend differenzierbar sind.

Lemma 13.3 (Homotopieformel) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $\gamma \in C^2([a, b] \times [0, 1], \Omega)$ eine Homotopie, mit festen Endpunkten oder geschlossen. Dann gilt mit $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$ für $t \in [0, 1]$

$$(13.5) \quad \left[\int_{\gamma_t} F \cdot dx \right]_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \int_a^b \sum_{i,j=1}^n (\partial_j F_i - \partial_i F_j) \circ \gamma \frac{\partial \gamma^i}{\partial s} \frac{\partial \gamma^j}{\partial t} ds dt.$$

Ist F rotationsfrei, so sind die Kurvenintegrale über γ_0, γ_1 gleich.

BEWEIS: Durch Differentiation unter dem Integral, Satz 9.2, und partielle Integration bezüglich $s \in [a, b]$ ergibt sich, zunächst für eine beliebige C^2 -Homotopie,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} F \cdot dx &= \frac{d}{dt} \int_a^b \langle F(\gamma(s, t)), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \rangle ds \\ &= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds + \int_a^b \langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \rangle ds \\ &= \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds + \langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big|_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle ds. \end{aligned}$$

Die Randwerte verschwinden: im Fall $\gamma(a, t)$ und $\gamma(b, t)$ konstant folgt $\partial_t \gamma(s, t) = 0$ für $s = a, b$. Und im Fall $\gamma(a, t) = \gamma(b, t)$ folgt auch $\partial_t \gamma(a, t) = \partial_t \gamma(b, t)$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \partial_j F^i \circ \gamma \frac{\partial \gamma^i}{\partial s} \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}, \\ \langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \partial_i F^j \circ \gamma \frac{\partial \gamma^i}{\partial s} \frac{\partial \gamma^j}{\partial t}. \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. $\square$

Wir können an dieser Stelle als Anwendung den Fundamentalsatz der Algebra, Satz 5.11 aus Analysis 1, beweisen. Es stellt sich heraus, dass es für die Existenz einer Nullstelle einen geometrischen Grund gibt.

Satz 13.3 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.*

BEWEIS: Das Winkelvektorfeld $W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 13.3 erfüllt $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$. Sei $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$. Schreibe $p(z) = p_n(z) + q(z)$ mit $p_n(z) = z^n$. Betrachte nun die Homotopie

$$\gamma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(\theta, t) = p_n(Re^{i\theta}) + tq(Re^{i\theta}).$$

Wir haben $\gamma_0(\theta) = (Re^{i\theta})^n$ und $\gamma_1(\theta) = p(Re^{i\theta})$. Die Homotopie geht a priori nach $\mathbb{R}^2$, aber $q(z)$ hat Grad höchstens $n-1$, daher ist $|q(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2}R^n$ für $R > 0$ hinreichend groß. Es folgt

$$|\gamma(\theta, t)| \geq |p_n(Re^{i\theta})| - |q(Re^{i\theta})| \geq R^n - \frac{1}{2}R^n > 0.$$

Mit Lemma 13.3 und Beispiel 13.3 gilt

$$\int_{\gamma_1} W \cdot dx = \int_{\gamma_0} W \cdot dx = 2\pi n.$$

Nun betrachten wir die zweite, ebenfalls glatte Homotopie

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}(\theta, \varrho) = p(\varrho e^{i\theta}).$$

Hätte $p(z)$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so wäre dies eine Homotopie in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwischen $\tilde{\gamma}_R(\theta) = p(Re^{i\theta}) = \gamma_1(\theta)$ und der konstanten Kurve $\tilde{\gamma}_0(\theta) = p(0)$. Wieder mit Lemma 13.3 folgt

$$\int_{\gamma_1} W \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_0} W \cdot dx = 0,$$

ein Widerspruch. □

Wir kommen nun auf das Problem der Wegunabhängigkeit, bzw. äquivalent der Existenz einer Stammfunktion, zurück. Beispiel 13.3 weist darauf hin, dass es neben der Rotationsfreiheit des Vektorfeldes auch auf das Gebiet Ω ankommt.

Definition 13.4 Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a, b], \Omega)$ in Ω geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.

Beispiel 13.4 Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in \Omega$ gibt mit

$$(1 - t)x + tx_0 \in \Omega \quad \text{für alle } x \in \Omega, t \in [0, 1].$$

Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve $\gamma_0 \in C^0([a, b], \Omega)$ ist homotop zur konstanten Kurve in x_0 , durch die Homotopie

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, \gamma(s, t) = (1 - t)\gamma_0(s) + tx_0.$$

Satz 13.4 (Stammfunktion) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es gelte

(a) Für alle $i, j = 1, \dots, n$ ist $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω .

(b) Ω ist einfach zusammenhängend.

Dann gibt es auf Ω eine Stammfunktion zu F .

Der Beweis ist im Prinzip klar: nach Satz 13.1 reicht es zu zeigen, dass das Kurvenintegral längs jeder geschlossenen PC^1 -Kurve γ gleich Null ist. Nach Voraussetzung ist aber γ homotop zu einer konstanten Kurve. Wegen F rotationsfrei ist das Kurvenintegral längs der Homotopie konstant nach Lemma 13.3, und damit gleich Null wie verlangt.

Es gibt eine technische Komplikation. Die Homotopie von γ zur konstanten Kurve muss nach Definition 13.3 nur stetig sein. Das Kurvenintegral längs $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$ ist damit nicht definiert, außer für $t = 0, 1$. Erst recht kann die Homotopieformel nicht angewandt werden. Um das zu umgehen, ersetzen wir die γ_t durch stückweise lineare Kurven und verwenden affin-lineare Homotopien. Für diese ist die Homotopieformel gültig.

Lemma 13.4 (affine Homotopie) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für $1 \leq i, j \leq n$. Betrachte eine affine Homotopie

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, \gamma(s, t) = (1 - t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Dabei seien $\gamma_{0,1} \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit Randbedingungen

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \quad \text{oder} \quad \gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b).$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\gamma_0} F \cdot dx.$$

BEWEIS: Seien zunächst $\gamma_{0,1}$ von der Klasse C^1 . Wir haben

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}(s, t) = \gamma_1'(s) - \gamma_0'(s) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial t}(s, t).$$

Dies reicht für die Rechnung aus Lemma 13.3 aus. Da F rotationsfrei ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma_t} F \cdot dx = \langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \rangle \Big|_{s=a}^{s=b}.$$

Seien nun $\gamma_{0,1}$ nur in PC^1 . Dann gibt es eine Unterteilung $a = s_0 < \dots, s_N = b$, so dass $\gamma_{0,1} \in C^1$ auf jedem Teilintervall $[s_{k-1}, s_k]$. Wir wenden die Rechnung auf $[s_{k-1}, s_k]$ an und addieren. Dabei heben sich alle Randwerte weg, außer für $s = a, b$. Diese sind aber Null wegen der Randbedingungen. $\square$

Satz 13.5 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für $1 \leq i, j \leq n$. Sind dann $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ homotop in Ω mit festen Endpunkten (oder geschlossen homotop), so gilt

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx.$$

BEWEIS: Sei $\gamma \in C^0([a, b] \times [0, 1], \Omega)$ die Homotopie, also $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ und $\gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$. Aus Kompaktheitsgründen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\text{dist}(\gamma([a, b] \times [0, 1]), \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2\varepsilon.$$

Da γ auf $[a, b] \times [0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(s, t) - \gamma(s', t')| < \varepsilon \quad \text{für } |s - s'|, |t - t'| < \delta.$$

Wir ersetzen jetzt $\gamma(\cdot, t)$ durch stückweise lineare Kurven. Seien $a = s_0 < \dots < s_N = b$ äquidistant gewählt. Wir definieren $\tilde{\gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{\gamma}(s, t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_{k-1}, t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} \gamma(s_k, t) \quad \text{für } s \in [s_{k-1}, s_k].$$

Es gilt $\tilde{\gamma}(a, t) = \gamma(a, t)$ und $\tilde{\gamma}(b, t) = \gamma(b, t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Wir behaupten, dass die affine Homotopie zwischen γ und $\tilde{\gamma}$ in Ω liegt. Für $s \in [s_{k-1}, s_k]$ haben wir

$$|\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| \leq \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_{k-1}, t) - \gamma(s, t)| + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_k, t) - \gamma(s, t)| < \varepsilon.$$

Für $\lambda \in [0, 1]$ folgt daraus die Abschätzung

$$|(1 - \lambda)\gamma(s, t) + \lambda\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| = \lambda|\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| < \varepsilon,$$

und die Behauptung folgt. Als zweites zeigen wir, dass für $|t - t'| < \delta$ die affine Homotopie zwischen $\tilde{\gamma}(\cdot, t)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot, t')$ ebenfalls in Ω liegt. Und zwar gilt für $s \in [s_{k-1}, s_k]$

$$|\tilde{\gamma}(s, t) - \tilde{\gamma}(s, t')| \leq \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_{k-1}, t) - \gamma(s_{k-1}, t')| + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} |\gamma(s_k, t) - \gamma(s_k, t')| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich für $\mu \in [0, 1]$

$$|(1 - \mu)\tilde{\gamma}(s, t) + \mu\tilde{\gamma}(s, t') - \gamma(s, t)| \leq |\tilde{\gamma}(s, t) - \gamma(s, t)| + \mu |\tilde{\gamma}(s, t) - \tilde{\gamma}(s, t')| < 2\varepsilon.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N < \delta$ gewählt. Dann folgt mit Lemma 13.4

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} F \cdot dx &= \int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot dx \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot dx, \quad \text{sowie} \\ \int_{\tilde{\gamma}_{t_j}} F \cdot dx &= \int_{\tilde{\gamma}_{t_{j-1}}} F \cdot dx \quad \text{für } t_j = \frac{j}{N} \text{ mit } j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Folgende Tabelle fasst unsere Ergebnisse zum Kurvenintegral zusammen:

F Gradientenfeld	Satz 13.1 $\iff$	$\int F \cdot dx$ wegunabhängig
$\Downarrow$ Satz 13.2	$\Uparrow$ 1-fach zshg. Satz 13.4 $\Uparrow$	$\Downarrow$ (klar)
F rotationsfrei	Satz 13.5 $\iff$	$\int F \cdot dx$ homotopieinvariant

Die Implikation von rechts nach links in der unteren Zeile folgt leicht aus der Homotopieformel, Lemma 13.3, und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Abstrakt aber nicht exakt kann die Sache so gesehen werden: für ein gegebenes Vektorfeld F ist das Kurvenintegral ein Funktional $\mathcal{F}$ auf dem Raum X der geschlossenen Kurven in Ω . Nach Lemma 13.3 ist die Ableitung dieses Funktionals gleich

$$D\mathcal{F}(\gamma)\phi = - \int_a^b \langle (DF - DF^T) \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \phi \rangle ds.$$

F rotationsfrei bedeutet, dass diese Ableitung gleich Null ist. In Konsequenz ist $\mathcal{F}$ konstant auf den (Weg-)Komponenten von X , den Homotopieklassen. Rigoros wird das in Satz 13.5 bewiesen. Ist Ω einfach zusammenhängend, das heißt die Homotopieklasse der konstanten Kurven ist die einzige Komponente, so ist $\mathcal{F}$ identisch Null. Dann existiert eine Stammfunktion, wie in Satz 13.1 gezeigt.