ANALYSIS III

Wintersemester 20/21

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1	Abstrakte äußere Maße	1
2	Äußere Maße auf \mathbb{R}^n	1
3	Das Lebesguemaß	.9
4	Das Lebesgueintegral	27
5	Konvergenzsätze	1
6	Die L^p -Räume	19
7	Der Satz von Fubini	51
8	Der Transformationssatz	′3
9	Das Flächenmaß auf Untermannigfaltigkeiten	35
10	Der Integralsatz von Gauß	9
11	Faltung und Fouriertransformation)9
12	Anhang	23

1 Abstrakte äußere Maße

Die Maßtheorie ist ein gutes Beispiel dafür, dass die Dinge durch Abstraktion einfacher werden. In diesem Kapitel behandeln wir abstrakte äußere Maße, und besprechen eine Reihe von Beispielen. Die äußeren Maße sind a priori auf allen Mengen definiert, was der Situation in der Analysis und Geometrie entspricht. Aber nicht mit allen Mengen kann auch vernünftig gerechnet werden, deshalb wird der Begriff der Messbarkeit nach Caratheodory eingeführt. Insbesondere verhält sich das Maß bei Grenzprozessen mit messbaren Mengen stetig.

Wir beginnen mit Vorbemerkungen zum Umgang mit dem Symbol ∞ , genauer $+\infty$ und $-\infty$. Auf der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ sind die Ordnungsrelation $-\infty < a < \infty$ für $a \in \mathbb{R}$ und der Konvergenzbegriff auf naheliegende Weise gegeben.

Definition 1.1 (Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$) *Eine Folge* $s_k \in \overline{\mathbb{R}}$ $(k \in \mathbb{N})$ *konvergiert gegen* $s \in \overline{\mathbb{R}}$, *falls eine der folgenden Alternativen gilt:*

- (i) $s \in \mathbb{R}$, und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $s_k \in (s \varepsilon, s + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ für k hireichend groß.
- (ii) $s = \infty$, und für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt $s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß.
- (iii) $s = -\infty$, und für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt $s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß.

Eine Folge $s_k \in \mathbb{R}$ ist genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in \mathbb{R} konvergiert oder bestimmt divergiert gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$. Der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge, bzw. einer Reihe mit nichtnegativen Gliedern, ist also immer existent. Die Addition und Multiplikation wird wie folgt auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortgesetzt:

Die Regel $0 \cdot \infty = 0$ ist nicht direkt begründet, sie wird sich aber als praktisch erweisen. Schließlich verwenden wir die Vereinbarungen

$$\sup \emptyset = -\infty \quad \text{ und } \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Diese sind konsistent mit der Tatsache, dass für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ stets gilt:

$$A \subset B \implies \sup A \le \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf A \ge \inf B.$$

Wir bezeichnen mit 2^X die Potenzmenge einer Menge X, also die Menge aller Teilmengen von X. Eine Teilmenge von 2^X wird in der Maßtheorie oft als $System\ von\ Mengen$ bezeichnet, wohl um den Ausdruck "Menge von Mengen" zu vermeiden.

Definition 1.2 (äußeres Maß) Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu: 2^X \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt (äußeres) Maß auf X, falls gilt:

(1.1)
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Zur Terminologie: wir lassen das Adjektiv $\ddot{a}u\beta ere$ oft der Kürze halber weg, sprechen also nur von einem $Ma\beta$. Der Begriff des Maßes, wie er zum Beispiel in der Stochastik benutzt wird, weicht etwas ab, siehe Definition 1.6. In der Analysis sind äußere Maße aber natürlich, sie sind für diese Vorlesung ausreichend.

Nehmen wir in Definition 1.2 Überdeckungen mit $A_i = \emptyset$ für i > k, so folgt

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Insbesondere ergibt sich

$$(1.2) A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) (Monotonie von \mu).$$

Weiter haben wir

(1.3)
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-Subadditivität}).$$

Umgekehrt folgt aus (1.2) und (1.3) offensichtlich die Eigenschaft (1.1). Der Buchstabe σ steht in der Maßtheorie für "abzählbar unendlich", in Abgrenzung zu "endlich". Man würde von einem Maß erwarten, dass es endlich additiv ist, dass also gilt:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Im allgemeinen ist das aber nicht für alle Mengen erfüllt. Wir führen deshalb die Klasse der Mengen A ein, die jede andere Menge S additiv zerlegen, siehe (1.4). Auf diesen Mengen können wir mit dem Maß vernünftig rechnen.

Definition 1.3 (Messbarkeit) Sei μ ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $A \subset X$ heißt μ -messbar, falls gilt:

(1.4)
$$\mu(S) \ge \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$, gilt ", \leq " in (1.4) sowieso nach (1.3). Mit anderen Worten

$$(1.5) A messbar \Leftrightarrow \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \forall S \subset X.$$

Wir wollen die Definitionen nun an ein paar einfachen Beispielen betrachten.

Beispiel 1.1 Für einen Punkt $x \in X$ ist das zugehörige Diracmaß gegeben durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\delta_x(A) \in \{0,1\}$ und $\delta_x(\emptyset) = 0$ per Definition. Ist eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gegeben und ist $x \in A$, so folgt $x \in A_k$ für (mindestens) ein k. Hieraus folgt die Eigenschaft (1.1), denn im Fall $x \notin A$ gilt ohnehin $\delta_x(A) = 0$. Alle Mengen $A \subset X$ sind messbar bzgl. δ_x . Ist nämlich $x \notin S$ so sind beide Seiten in (1.4) Null, und für $x \in S$ liegt x in genau einer der Mengen $S \cap A$ bzw. $S \setminus A$.

Beispiel 1.2 Sei X eine Menge. Das Zählmaß card : $2^X \to [0, \infty]$ berechnet für jede Menge $A \subset X$ die Zahl der Elemente von A, es ist definiert durch

$$\operatorname{card}(A) = \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \varphi : \{1, \dots, n\} \to A \text{ injektiv}\} & \text{falls } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Ist $\operatorname{card}(A) = n < \infty$, so gibt es eine injektive Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to A$. Diese ist auch surjektiv, denn wäre $a \in A$ mit $a \notin \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$, so hätten wir die Injektion

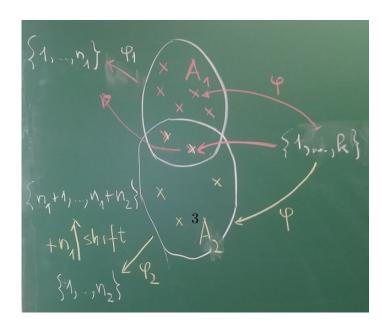
$$\phi: \{1, \dots, n+1\} \to A, \ \phi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{ für } i = 1, \dots, n \\ a & \text{ für } i = n+1. \end{cases}$$

Wir zeigen jetzt dass card ein äußeres Maß ist, und behaupten dazu als erstes

$$(1.6) \operatorname{card}(A_1 \cup A_2) \le \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2).$$

Sei ohne Einschränkung card $(A_i) = n_i \in \mathbb{N}$, also gibt es $\varphi_i : \{1, \ldots, n_i\} \to A_i$ bijektiv. Ist $\varphi : \{1, \ldots, k\} \to A_1 \cup A_2$ injektiv, so definieren wir $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n_1 + n_2\}$ durch

$$f(i) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(\varphi(i)) \in \{1, \dots, n_1\} & \text{falls } \varphi(i) \in A_1, \\ n_1 + \varphi_2^{-1}(\varphi(i)) \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\} & \text{falls } \varphi(i) \in A_2 \setminus A_1. \end{cases}$$



Die Abbildung f ist injektiv, also folgt $k \leq n_1 + n_2$ nach dem Schubfachprinzip und (1.6) ist gezeigt. Für endliche Vereingungen ergibt sich die Ungleichung durch Induktion, und daraus folgt schon die σ -Subadditivität

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{card}(A_i).$$

Denn ist die rechte Seite endlich, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_i = \emptyset$ für alle i > k. Nach Definition gilt weiter die Monotonie

$$A \subset B \implies \operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$$
.

Somit ist card ein äußeres Maß. Wir behaupten, dass alle Mengen $A \subset X$ messbar sind. Zu $S \subset X$, oBdA card $(S) < \infty$, wähle Bijektionen $\varphi_1 : \{1, \ldots, n_1\} \to S \cap A$ sowie $\varphi_2 : \{1, \ldots, n_2\} \to S \setminus A$, und setze

$$\varphi: \{1, \dots, n_1 + n_2\} \to S, \ \varphi(i) = \begin{cases} \varphi_1(i) & \text{für } i = 1, \dots, n_1, \\ \varphi_2(i - n_1) & \text{für } i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2. \end{cases}$$

Die Abbildung φ ist injektiv, also gilt

$$\operatorname{card}(S) \ge n_1 + n_2 = \operatorname{card}(S \cap A) + \operatorname{card}(S \setminus A).$$

Beispiel 1.3 Auf jeder Menge X erhalten wir ein blödes Maß β durch

$$\beta(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt die Maßeigenschaft (1.1). Aber nur \emptyset und X sind β -messbar, denn mit der Wahl S = X in (1.4) folgt, falls $A \subset X$ β -messbar ist,

$$1 \ge \beta(X) = \beta(A) + \beta(X \backslash A).$$

Beispiel 1.4 Für eine Familie μ_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, von äußeren Maßen auf X sei

$$\mu(A) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \mu_{\lambda}(A).$$

Dann ist μ ein äußeres Maß auf X, denn für $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und festes $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\mu_{\lambda}(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\lambda}(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Bilde nun auf der linken Seite das Supremum über alle $\lambda \in \Lambda$ und erhalte (1.1). Es ist im allgemeinen nicht klar, welche Mengen bzgl. μ messbar sind.

Die folgenden beiden Konstruktionen von Maßen werden öfters benutzt.

Satz 1.1 (Bildmaß) Seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$. Für ein gegebenes äußeres Maß $\mu: 2^X \to [0, \infty]$ erhält man ein äußeres Maß $f(\mu)$ auf Y durch

$$f(\mu): 2^Y \to [0, \infty], f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

 $f(\mu)$ heißt Bildmaß von μ unter f, und es gilt für alle $B \subset Y$

(1.7)
$$f^{-1}(B) \mu\text{-messbar} \Rightarrow B f(\mu)\text{-messbar}.$$

BEWEIS: Für $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ gilt $f^{-1}(B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$ und folglich nach Definition 1.1

$$f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\mu)(B_i).$$

Außerdem ist trivialerweise $f(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Nun ist nach Definition von $f(\mu)$ die Menge $B \subset Y$ genau dann $f(\mu)$ -messbar, wenn gilt:

$$\mu(f^{-1}(T)) \ge \mu(f^{-1}(T \cap B)) + \mu(f^{-1}(T \setminus B))$$
 für alle $T \subset Y$.

Da $f^{-1}(T \cap B) = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)$ sowie $f^{-1}(T \setminus B) = f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(B)$, ist dies äquivalent zu

$$\mu(f^{-1}(T)) \ge \mu(f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)) + \mu(f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(B))$$
 für alle $T \subset Y$.

Dagegen ist $f^{-1}(B)$ genau dann μ -messbar, wenn

$$\mu(S) \ge \mu(S \cap f^{-1}(B)) + \mu(S \setminus f^{-1}(B))$$
 für alle $S \subset X$.

Also folgt die Behauptung (1.7), indem wir $S = f^{-1}(T)$ setzen.

Satz 1.2 (Einschränkung) Sei $\mu: 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Für eine gegebene Menge $M \subset X$ erhält man ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X durch

$$\mu \sqcup M : 2^X \to [0, \infty], \ \mu \sqcup M(A) = \mu(A \cap M).$$

 μLM heißt Einschränkung von μ auf M, und es gilt

$$(1.8) A \mu\text{-}messbar \Rightarrow A \mu \bot M\text{-}messbar.$$

Beweis: Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu L M$ ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für $A \subset X$ μ -messbar und $S \subset X$ beliebig

$$\begin{array}{lcl} \mu \llcorner M(S) & = & \mu(S \cap M) \\ & \geq & \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \backslash A) & (\text{da A μ-messbar}) \\ & = & \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \backslash A) \cap M) \\ & = & \mu \llcorner M(S \cap A) + \mu \llcorner M(S \backslash A). \end{array}$$

Dies beweist Behauptung (1.8).

Definition 1.4 (Nullmenge) Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $N \subset X$ heißt μ -Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$.

Proposition 1.1 (Messbarkeit von Nullmengen) Sei μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:

$$(1.9) N Nullmenge \Rightarrow N \mu\text{-messbar}$$

(1.10)
$$N_1, N_2, \dots Nullmenge \Rightarrow N_k \text{ μ-messoar}$$

$$N_1, N_2, \dots Nullmenge \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \text{ Nullmenge}.$$

BEWEIS: Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subset X$ gilt mit der Monotonie des äußeren Maßes μ

$$\mu(S) \geq \mu(S \backslash N) = \underbrace{\mu(S \cap N)}_{\leq \mu(N) = 0} + \mu(S \backslash N).$$

Das zeigt (1.9), und (1.10) folgt direkt aus Definition 1.2.

Wir wollen nun allgemein die Struktur des Systems \mathcal{M} der μ -messbaren Mengen untersuchen. Auf jeden Fall enthält \mathcal{M} alle Nullmengen $N \subset X$, und damit auch deren Komplemente $X \setminus N$, wie unten in Satz 1.3 gezeigt. Es kann sein, dass keine anderen Mengen messbar sind, zum Beispiel ist $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ in Beispiel 1.3. Aber in den relevanten Fällen erwarten wir doch, dass es viele weitere messbare Mengen gibt. Jedenfalls ist das System \mathcal{M} unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen. Dies soll nun gezeigt werden.

Definition 1.5 (σ -Algebra) Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^X$ heißt σ -Algebra, wenn gilt:

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii)
$$A_i \in \mathcal{A} \text{ für } i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Eine σ -Algebra \mathcal{A} ist auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen, das heißt es gilt

(1.11)
$$A_i \in \mathcal{A} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Dies folgt sofort aus der Darstellung $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i)$.

Lemma 1.1 Seien $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset X$ paarweise disjunkt und μ -messbar. Dann gilt

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)$$
 für alle $S \subset X$.

Beweis: Für k=1 ist die Aussage trivial, und für $k \geq 2$ folgt induktiv, da A_k μ -messbar,

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_k) + \mu((S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \setminus A_k)$$

$$= \mu(S \cap A_k) + \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i).$$

Satz 1.3 (System der messbaren Mengen) Sei $\mu: X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist das System \mathcal{M} der μ -messbaren Mengen eine σ -Algebra, und es gilt

$$(1.12) A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}, paarweise \ disjunkt \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Beweis: Es gilt $X \in \mathcal{M}$, denn für jede Menge $S \subset X$ ist

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S).$$

Mit $A \in \mathcal{M}$ folgt auch $X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn für $S \subset X$ gilt

$$\mu\big(S\cap (X\backslash A)\big)+\mu\big(S\backslash (X\backslash A)\big)=\mu(S\backslash A)+\mu(S\cap A)=\mu(S).$$

Als nächstes zeigen wir, dass $A \cup B \in \mathcal{M}$ für $A, B \in \mathcal{M}$, und zwar gilt für $S \subset X$ beliebig

$$\mu(S \cap (A \cup B)) + \mu(S \setminus (A \cup B)) \leq \mu(S \cap A) + \mu((S \setminus A) \cap B) + \mu((S \setminus A) \setminus B)$$

$$= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \quad (\text{da } B \in \mathcal{M})$$

$$= \mu(S) \quad (\text{da } A \in \mathcal{M}).$$

Hieraus folgt auch $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in \mathcal{M}$ und $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}$. Per Induktion erhalten wir, dass \mathcal{M} unter endlichen Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen ist. Jetzt zeigen wir

$$A_i \in \mathcal{M} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}.$$

Wir können dazu annehmen, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, andernfalls betrachten wir $\tilde{A}_i = A_i \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1})$. Für $S \subset X$ beliebig folgt, da $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{M}$,

$$\mu(S) = \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i) \ge \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus A).$$

Im zweiten Schritt wurde Lemma 1.1 und die Monotonie von μ benutzt. Mit $k \to \infty$ erhalten wir wegen der σ -Subadditivität von μ

$$\mu(S) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus A) \ge \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (S \cap A_i)\right) + \mu(S \setminus A) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Also ist $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mu$ -messbar. Schließlich folgt mit S = X in Lemma 1.1

$$\lim_{k \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \ge \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \ge \lim_{k \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right),$$

wieder mit der σ -Subadditivität und der Monotonie. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 1.4 (Stetigkeit von Maßen) Sei μ äußeres Maß auf X, und A_1, A_2, \ldots seien μ -messbar. Dann gelten folgende Aussagen:

(i)
$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$
 $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$ (Stetigkeit von unten)

(ii)
$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$
 (Stetigkeit von oben).

Beweis: Für (i) setze $\tilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ und berechne unter Verwendung von (1.12)

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) = \lim_{k \to \infty} \mu\big(\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{A}_i\big) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Für (ii) betrachte die aufsteigende Folge $A'_k = A_1 \setminus A_k$. Es gilt

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k).$$

Daraus folgt wegen (i)

$$\mu(A_1) - \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) = \mu(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Beispiel 1.5 Die Bedingung $\mu(A_1) < \infty$ in (ii) kann nicht ersatzlos gestrichen werden. Mit $A_k = \{k, k+1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ gilt zum Beispiel $\operatorname{card}(A_k) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\operatorname{card}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

Zum Schluss des Kapitels erwähnen wir den Begriff des Maßes, wie er in der Stochastik, oft auch in der Analysis, vorkommt.

Definition 1.6 (Maß) Sei $A \subset 2^X$ eine gegebene σ -Algebra. Eine Funktion $\mu : A \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt Maß auf A, falls

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
 für jede paarweise disjunkte Folge $A_i \in \mathcal{A}$.

Das Tripel (X, A, μ) wird dann auch als Maßraum bezeichnet.

Nach Satz 1.3 induziert jedes äußere Maß μ auf der σ -Algebra \mathcal{M} das Maß $\mu|_{\mathcal{M}}$.

2 Äußere Maße auf \mathbb{R}^n

Wie betrachten nun Maße auf dem \mathbb{R}^n . Wie üblich haben wir dann die σ -Algebra der messbaren Mengen, andererseits erzeugen die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen ebenfalls eine σ -Algebra, diese heißt Borelalgebra. Es geht dann um das Verhältnis dieser beiden Mengensysteme. Erstens beweisen wir ein Kriterium von Caratheodory dafür, dass alle Borelmengen messbar sind. Umgekehrt zeigen wir für Borelmaße, dass sich messbare Mengen von Borelmengen nur um eine Nullmenge unterscheiden.

In der Analysis im \mathbb{R}^n spielt das System der offenen Mengen eine wichtige Rolle. Für ein gegebenes Maß μ stellt sich damit die Frage: sind alle offenen Mengen μ -messbar? Wenn ja, so sind auch abgeschlossene Mengen messbar, denn diese sind genau die Komplemente der offenen Mengen. Nach Satz 1.3 erhalten wir weitere messbare Mengen dann als abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte. Um hier etwas System reinzubringen, ist der folgende Begriff nützlich.

Definition 2.1 Sei \mathcal{E} ein System von Mengen $E \subset X$. Die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra ist

(2.1)
$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \}.$$

Aus Definition 1.5 ergibt sich direkt, dass Durchschnitte von σ -Algebren wieder eine σ -Algebra liefern. Insbesondere ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra, und zwar ist es die kleinste σ -Algebra die \mathcal{E} enthält, im Sinne der folgenden Implikation:

(2.2)
$$\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}.$$

Beispiel 2.1 Ist
$$E \subset X$$
 und $\mathcal{E} = \{E\}$, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$.

Es muss gesagt werden, dass Definition 2.1 nicht konstruktiv ist. Wir wissen zwar, dass abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte wieder in $\sigma(\mathcal{E})$ landen; das kann beliebig oft iteriert werden. Aber im allgemeinen können wir die erzeugte σ -Algebra nicht einfach hinschreiben, die Menge aller σ -Algebren \mathcal{A} mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ist nicht explizit bekannt. Vielmehr verwenden wir in Anwendungen des Begriffs immer die Eigenschaft (2.2).

Definition 2.2 (Borelmengen) Die vom System der offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ erzeugte σ -Algbra heißt Borelalgebra \mathcal{B} , ihre Elemente sind die Borelmengen.

Nach Satz 1.3 ist das System \mathcal{M} der μ -messbaren Mengen eine σ -Algebra. Sind also die offenen Mengen μ -messbar, so auch alle Borelmengen nach (2.2). Der folgende Satz gibt eine praktische hinreichende Bedingung.

Satz 2.1 (Caratheodory's Kriterium) Sei μ äußeres Maß auf \mathbb{R}^n mit

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$
 falls $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

Dann ist μ ein Borelmaß*, das heißt alle Borelmengen sind μ -messbar.

^{*}Die Terminologie ist in der Literatur nicht einheitlich.

BEWEIS: Wir zeigen dass jede abgeschlossene Menge A messbar ist; daraus folgt die Behauptung mit (2.2). Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, oBdA mit Maß $\mu(S) < \infty$. Betrachte die Parallelmengen $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,A) \leq \frac{1}{j}\}$. Für $x \in A$ und $y \notin A_j$ ist $|x-y| \geq \operatorname{dist}(A,y) > \frac{1}{j}$. Es folgt

$$\operatorname{dist}(S \cap A, S \backslash A_j) \ge \frac{1}{j} > 0.$$

Mit der Voraussetzung ergibt sich

$$\mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A_j) + \mu(S \cap (A_j \setminus A))$$

=
$$\mu((S \cap A) \cup (S \setminus A_j)) + \mu(S \cap (A_j \setminus A))$$

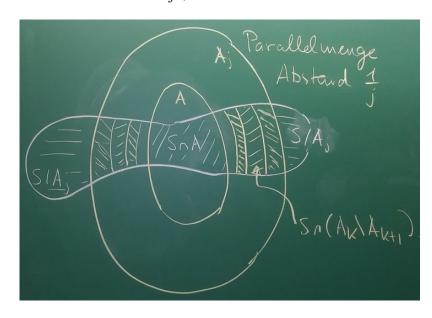
\leq
$$\mu(S) + \mu(S \cap (A_j \setminus A)).$$

Es reicht also zu zeigen dass $\lim_{j\to\infty} \mu(S\cap(A_j\backslash A)) = 0$. Satz 1.4(ii) ist hier nicht anwendbar, die Mengen $S\cap(A_j\backslash A)$ sind ggf. nicht messbar. Stattdessen zerlegen wir sie in Parallelstreifen:

$$S \cap (A_j \backslash A) = \bigcup_{k=j}^{\infty} S_k \quad \text{mit } S_k = S \cap (A_k \backslash A_{k+1}).$$

Beachte: für $x \notin A$ gilt dist(x, A) > 0, da A abgeschlossen, also liegt jedes $x \in S \cap (A_j \setminus A)$ in genau einer der Mengen S_k . Es gilt

(2.3)
$$\operatorname{dist}(S_j, S_k) \ge \frac{1}{j+1} - \frac{1}{k} > 0 \quad \text{für } k \ge j+2.$$



Und zwar haben wir für $x \notin A_{i+1}$, $y \in A_k$ und beliebiges $a \in A$

$$\frac{1}{j+1} < \text{dist}(x,A) \le |x-a| \le |x-y| + |y-a|.$$

Wir bilden das Infimum über alle $a \in A$ und erhalten

$$\frac{1}{j+1} \le |x-y| + \text{dist}(y,A) \le |x-y| + \frac{1}{k}.$$

Das zeigt (2.3). Nach Voraussetzung folgt nun induktiv

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(S_{2i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_{2i}\right) \le \mu(S) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(S_{2i-1}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} S_{2i-1}\right) \le \mu(S) < \infty.$$

Also ist $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) < \infty$, und mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy folgt

$$\mu(S \cap (A_j \setminus A)) \le \sum_{k=j}^{\infty} \mu(S_k) \to 0 \quad \text{mit } j \to \infty.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir können Borelmengen schrittweise erzeugen, indem wir mit den offenen und abgeschlossenen Mengen als nullter Generation starten. Die erste Generation besteht dann aus den abzählbaren Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen, und den abzählbaren Durchschnitten von offenen Mengen; hierfür hat Felix Hausdorff die Bezeichnungen F_{σ} -Menge bzw. G_{δ} -Menge eingeführt. Die zweite Generation besteht aus abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten dieser Mengen und so weiter. Die Darstellung wird dabei immer komplexer. Der folgende Satz liefert aber eine einfache Zerlegung bezüglich eines Maßes μ .

Satz 2.2 (In-Approximation für Borelmaße) Sei μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^n . Dann gilt für jede Borelmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(E) < \infty$

(2.4)
$$\inf \{ \mu(E \backslash C) : C \text{ abgeschlossen, } C \subset E \} = 0.$$

Insbesondere gibt es $C_j \subset E$ abgeschlossen mit $\mu(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j) = 0$.

Beweis: Sei zunächst $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Betrachte das System

$$\mathcal{E} = \{ E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ Borel mit } (2.4) \}.$$

Zu $E_j \in \mathcal{E}, j \in \mathbb{N}$, gibt es $C_j \subset E_j$ abgeschlossen mit $\mu(E_j \setminus C_j) < 2^{-j} \varepsilon$. Es folgt

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus C_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \setminus C_j) < \varepsilon.$$

Also ist $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}$. Weiter gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \le \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus C_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \setminus C_j) < \varepsilon.$$

Da E_j und C_j messbar sind sowie $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, folgt aus Satz 1.4(ii)

$$\lim_{k\to\infty}\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\setminus\bigcup_{j=1}^{k}C_j\big)=\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}C_j\big)<\varepsilon.$$

Also ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$. Wir zeigen nun:

$$\mathcal{E}^* = \{ E \in \mathcal{E} : \mathbb{R}^n \backslash E \in \mathcal{E} \}$$
 ist eine σ -Algebra.

Denn mit $E \in \mathcal{E}^*$ ist auch $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{E}^*$, und für $E_i \in \mathcal{E}^*$ gilt

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus E_j \in \mathcal{E} \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus E_j \in \mathcal{E}.$$

Für C abgeschlossen gilt $C \in \mathcal{E}^*$: offenbar ist $C \in \mathcal{E}$, und $\mathbb{R}^n \setminus C \in \mathcal{E}$ folgt mit

$$\mathbb{R}^n \backslash C = \{ x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, C) > 0 \} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{ x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, C) \ge \frac{1}{j} \}.$$

Somit ist $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ die ganze Borelalgebra, und der Satz ist im Fall $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ bewiesen. Ist μ beliebiges Borelmaß, so betrachten wir die Einschränkung $\lambda = \mu L$. Nach Satz 1.2 sind Borelmengen auch λ -messbar, und es gilt

$$\lambda(\mathbb{R}^n) = (\mu L E)(\mathbb{R}^n) = \mu(E) < \infty$$
 nach Voraussetzung.

Wie gezeigt gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subset E$ mit $\lambda(E \setminus C) < \varepsilon$, das heißt $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten ab jetzt folgende Klasse von Maßen.

Definition 2.3 (Radonmaß) Ein Borelmaß μ auf \mathbb{R}^n heißt Radonmaß, falls gilt:

- (1) μ ist lokal endlich, also $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
- (2) μ ist Borelregulär, das heißt zu jeder Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Borelmenge $B \supset E$ mit $\mu(B) = \mu(E)$. Man nennt B dann eine Borelhülle von E.

Achtung: für $B \supset E$ gilt $E = B \setminus (B \setminus E)$. Ist E nicht messbar, so muss $\mu(B \setminus E) > 0$ sein.

Satz 2.3 Sei μ Borelma β und $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(E) < \infty$. Ist μ Borelregulär und E μ -messbar, so ist $\mu \llcorner E$ ein (endliches) Radonma β .

BEWEIS: Nach Satz 1.2 ist $\mu L E$ ein Borelmaß mit $\mu L E(\mathbb{R}^n) < \infty$. Wir müssen zeigen, dass $\mu L E$ Borelregulär ist. Im ersten Schritt nehmen wir zusätzlich E Borel an, und konstruieren zu gegebenem $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelhülle \tilde{S} . Wähle dazu $B \supset S \cap E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(S \cap E)$. Dann ist $\tilde{S} := B \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)$ Borel mit $\tilde{S} \supset S$, und

$$\mu \llcorner E(\tilde{S}) = \mu(B \cap E) \le \mu(B) = \mu(S \cap E) = \mu \llcorner E(S).$$

Sei jetzt E nur messbar mit $\mu(E) < \infty$. Wähle $B \supset E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(E)$. Es gilt dann $\mu \sqsubseteq E = \mu \sqsubseteq B$, und zwar berechnen wir für alle $S \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{lcl} \mu \llcorner B(S) & = & \mu(S \cap B) \\ & \leq & \mu(S \cap E) + \mu(B \backslash E) \\ & = & \mu \llcorner E(S) + \mu(B) - \mu(E) \\ & \leq & \mu \llcorner B(S). \end{array}$$

Die Behauptung folgt also aus dem ersten Schritt.

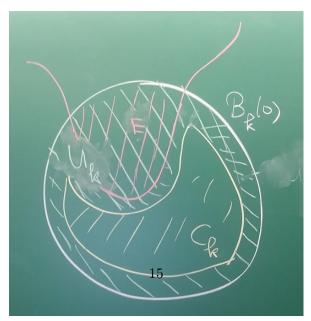
Satz 2.4 (Approximation für Radonmaße) Sei μ ein Radonmaß auf \mathbb{R}^n . Dann gelten für $E \subset \mathbb{R}^n$ folgende Aussagen:

- (1) $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ offen, } U \supset E \}.$
- (2) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt, } K \subset E\}, \text{ falls } E \text{ messbar ist.}$

BEWEIS: Für (1) sei ohne Einschänkung $\mu(E) < \infty$. Wir können auch E Borel annehmen, andernfalls wende (1) auf eine Borelhülle $B \supset E$ an. Nach Satz 2.2 gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Menge $C_k \subset B_k(0) \setminus E$ mit

$$\mu(B_k(0)\backslash(E\cup C_k)) = \mu((B_k(0)\backslash E)\backslash C_k) < 2^{-k}\varepsilon.$$

Dann ist $U_k = B_k(0) \setminus C_k$ offen, enthält $B_k(0) \cap E$, und mit $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ gilt



$$\mu(U \backslash E) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \backslash E\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu\Big(B_k(0) \backslash (E \cup C_k)\Big) < \varepsilon.$$

Damit ist Aussage (1) bewiesen. Für (2) können wir \overline{E} kompakt annehmen, denn nach Satz 1.4(i) gilt $\mu(E) = \lim_{k \to \infty} \mu(E \cap B_k(0))$. Nach Satz 2.3 ist $\mu \sqsubseteq E$ ein Radonmaß. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wie bewiesen $U \supset \mathbb{R}^n \setminus E$ offen mit

$$\mu \llcorner E(U) < \mu \llcorner E(\mathbb{R}^n \backslash E) + \varepsilon = \varepsilon.$$

Dann ist $C = \mathbb{R}^n \setminus U$ abgeschlossen mit $C \subset E$, insbesondere C kompakt, mit

$$\mu(E) \le \mu(E \setminus U) + \mu(E \cap U) < \mu(C) + \varepsilon.$$

Folgerung 2.1 (Messbarkeit für Radonmaße) Sei μ ein Radonmaß auf \mathbb{R}^n . Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann μ -messbar, wenn eine der beiden (äquivalenten) Bedingungen gilt:

- (1) Es gibt eine Borelmenge $C \subset D$ mit $\mu(D \setminus C) = 0$.
- (2) Es gibt eine Borelmenge $E \supset D$ mit $\mu(E \backslash D) = 0$.

Es kann $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i$ mit A_i abgeschlossen gewählt werden, sowie $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ mit U_i offen.

Beweis: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar bezüglich μ . Schreibe

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \quad \text{mit } D_j = \{x \in D : j-1 \le |x| < j\} \text{ für } j \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 2.4 gibt es $K_{i,j}$ kompakt und $U_{i,j}$ offen mit $K_{i,j} \subset D_j \subset U_{i,j}$, so dass

$$\mu(K_{i,j}) > \mu(D_i) - 2^{-j}/i$$
 und $\mu(U_{i,j}) < \mu(D_i) + 2^{-j}/i$.

Dann ist $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j}$ abgeschlossen(!), $U_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i,j}$ ist offen, und es gilt $A_i \subset D \subset U_i$. Mit $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ bzw. $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ gelten für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$\mu(D \backslash C) \le \mu(D \backslash A_i) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j \backslash K_{i,j}) \le \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(D_j) - \mu(K_{i,j})) \le \frac{1}{i},$$

$$\mu(E \backslash D) \le \mu(U_i \backslash D) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_{i,j} \backslash D_j) \le \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(U_{i,j}) - \mu(D_j)) \le \frac{1}{i}.$$

Dabei wurde die Messbarkeit von D_j benutzt. Mit $i \to \infty$ folgen (1) und (2). Umgekehrt folgt aus (1) bzw. (2) die Messbarkeit von D, denn $D = C \cup (D \setminus C) = E \setminus (E \setminus D)$.

16

Wir haben uns in diesem Kapitel auf Maße im \mathbb{R}^n beschränkt. Eine Verallgemeinerung für Maße auf metrischen Räumen (X,d) ist aber von Interesse, zum Beispiel ist jede Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ein metrischer Raum. Das Kriterium von Caratheodory und die Approximation von innen, Satz 2.1 und Satz 2.2, gelten in voller Allgemeinheit. Das ergibt sich leicht, wenn man die Beweise durchgeht. Satz 2.4, der Approximationssatz für Borelmaße, erfordert folgende zusätzlichen Kompaktheitseigenschaften:

- (a) X ist σ -kompakt, das heißt es gibt $K_i \subset X$ kompakt mit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$,
- (b) X ist lokalkompakt, das heißt zu $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U mit \overline{U} kompakt.

Eine kompakte Menge lässt sich durch endlich viele Umgebungen U wie in (b) überdecken. Insbesondere gibt es offene Mengen $U_i \supset K_i$ mit \overline{U}_i kompakt. Diese kann man im Beweis von Satz 2.4 statt der Kugeln verwenden.

3 Das Lebesguemaß

Hier studieren wir das Lebesguemaß \mathcal{L}^n auf dem \mathbb{R}^n . Wir zeigen, dass \mathcal{L}^n ein Radonmaß ist, das auf (zunächst achsenparallelen) Quadern das elementar definierte Volumen liefert. Das Maß wird dann durch die Eigenschaft der Translationsinvarianz eindeutig charakterisiert, bis auf einen konstanten Faktor. Damit beweisen wir, dass es auch unter orthogonalen Abbildungen invariant ist, und leiten eine Transformationsformel unter beliebigen linearen Abbildungen her. Schließlich geben wir ein Beispiel einer Menge in \mathbb{R} an, die nicht \mathcal{L}^1 messbar ist.

Wir starten mit der Definition des elementaren Volumens für achsenparallele Quader Q im \mathbb{R}^n , also $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ für endliche Intervalle I_j mit Grenzen $a_j \leq b_j$. Wir setzen

(3.1)
$$|Q| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \ge 0 \qquad (|Q| = 0 \text{ im Fall } Q = \emptyset).$$

Jede Koordinatenhyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$ liefert eine Zerlegung $Q = Q' \cup Q''$, wobei

$$Q' = \{x \in Q : x_i \le c\}$$
 und $Q'' = \{x \in Q : x_i \ge c\}$.

Der Schnitt von $\operatorname{int}(Q')$ und $\operatorname{int}(Q'')$ ist leer, und es gilt |Q| = |Q'| + |Q''|.

Definition 3.1 (Lebesguemaß) Das Lebesguemaß einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$(3.2) \mathcal{L}^n(E) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| : Q_i \text{ achsen paralleler Quader, } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \Big\}.$$

Satz 3.1 Für jeden achsenparallelen Quader $P \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{L}^n(P) = |P|$.

BEWEIS: Offensichtlich ist $\mathcal{L}^n(P) \leq |P|$, denn $\{P\}$ ist eine zulässige Überdeckung in Definition 3.1. Es ist also zu zeigen:

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \Rightarrow \quad |P| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|.$$

Wir machen das zuerst im endlichen Fall, das heißt $P \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$, durch Induktion über die Raumdimension n. Für n=1 wählen wir ein Intervall I=[a,b], das P und die Q_i enthält, und berechnen mit dem Riemannintegral

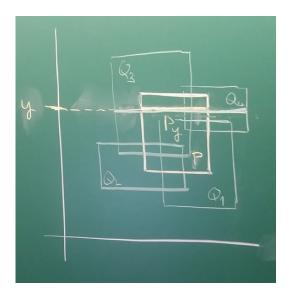
$$|P| = \int_{I} \chi_{P}(x) \, dx \le \int_{I} \sum_{i=1}^{N} \chi_{Q_{i}}(x) \, dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{I} \chi_{Q_{i}}(x) \, dx = \sum_{i=1}^{N} |Q_{i}|.$$

Sei nun die Aussage in Dimension n-1 gezeigt. Für $y \in \mathbb{R}$ betrachten wir den y-Schnitt von P, das ist die Menge $P_y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in P\}$. Mit $P = I_1 \times \ldots \times I_n$ gilt

$$P_y = \begin{cases} I_1 \times \ldots \times I_{n-1} & \text{falls } y \in I_n, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus $P \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$ folgt

$$P_y \subset \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in \bigcup_{i=1}^N Q_i\} = \bigcup_{i=1}^N \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in Q_i\} = \bigcup_{i=1}^N (Q_i)_y.$$



Wähle I = [a, b] so dass P, Q_1, \dots, Q_N in $\mathbb{R}^{n-1} \times I$ enthalten sind. Es folgt induktiv

$$|P| = \int_{I} |P_{y}| \, dy \le \int_{I} \sum_{i=1}^{N} |(Q_{i})_{y}| \, dy = \sum_{i=1}^{N} \int_{I} |(Q_{i})_{y}| \, dy = \sum_{i=1}^{N} |Q_{i}|.$$

Sei schließlich $P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, und ohne Einschränkung |P| > 0. Ist P kompakt und Q_i offen, so wird P schon durch endlich viele Q_i überdeckt nach Heine-Borel, und die Behauptung wurde oben gezeigt. Allgemein wählen wir $P' \subset P$ kompakt und $Q'_i \supset Q_i$ offen mit $|P'| > |P| - \varepsilon$ und $|Q'_i| < |Q_i| + 2^{-i}\varepsilon$. Es folgt

$$|P| - \varepsilon < |P'| \le \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i'| \le \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ ist der Satz bewiesen.

Satz 3.2 Das Lebesguema $\beta \mathcal{L}^n$ ist ein Radonma β .

Beweis: Wir arbeiten die Eigenschaften nacheinander ab.

Schritt 1: \mathcal{L}^n ist ein äußeres Maß.

 \mathbb{R}^n wird durch die achsenparallelen Quader $[-i,i]^n,\ i\in\mathbb{N},$ überdeckt, also ist jedenfalls

 $\mathcal{L}^n(E) \in [0,\infty]$. Indem wir $Q_i = \emptyset$ für alle *i* wählen, folgt auch $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$. Sei nun $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann achsenparallele Quader Q_{ij} mit

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{ij} \quad \text{ und } \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{ij}| < \mathcal{L}^n(E_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

Dann ist Q_{ij} mit $i, j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Überdeckung von E, und es folgt

$$\mathcal{L}^n(E) \le \sum_{i,j=1}^{\infty} |Q_{ij}| \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_i) + \varepsilon.$$

Schritt 2: \mathcal{L}^n ist Borelmaß.

Wir verwenden das Kriterium von Caratheodory, Satz 2.1. Für $\delta > 0$ sei \mathcal{Q}_{δ} die Menge aller achsenparallelen Quader mit Durchmesser diam $Q < \delta$. Setze

$$\mathcal{L}^n_{\delta}(E) = \inf \big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| : Q_i \in \mathcal{Q}_{\delta}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \big\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n_{\delta}(E)$. Aber jeder achsenparallele Quader Q kann durch Koordinatenhyperebenen in endliche viele Q_j mit Durchmesser diam $Q_j < \delta$ zerlegt werden, das Volumen ist dabei additiv. Wenden wir das auf jeden Quader einer gegebenen Überdeckung an, so erhalten wir eine überdeckung mit Quadern in \mathcal{Q}_{δ} , die Volumensumme bleibt dabei gleich. Das zeigt $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n_{\delta}(E)$. Seien nun $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit dist(A, B) > 0. Sei \mathcal{F} eine Überdeckung von $A \cup B$ mit Quadern in \mathcal{Q}_{δ} , wobei $\delta < \text{dist}(A, B)$. Bezeichne mit \mathcal{F}_A und \mathcal{F}_B die Menge der Quader, die A bzw. B treffen. Dann sind \mathcal{F}_A und \mathcal{F}_B disjunkt, deshalb folgt

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}} |Q| \ge \sum_{Q \in \mathcal{F}_A} |Q| + \sum_{Q \in \mathcal{F}_R} |Q| \ge \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B).$$

Durch Bilden des Infimums folgt

$$\mathcal{L}^n(A \cup B) = \mathcal{L}^n_{\delta}(A \cup B) \ge \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B).$$

Schritt 3: \mathcal{L}^n ist lokal endlich.

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition $\mathcal{L}^n([-k,k]^n) \leq |[-k,k]^n| = (2k)^n < \infty$.

Schritt 4: \mathcal{L}^n ist Borelregulär.

Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Überdeckung $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^k$ mit achsenparallelen Quadern, so dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^k| < \mathcal{L}^n(E) + \frac{1}{k}.$$

Betrachte nun die Borelmenge

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^k \supset E.$$

Offenbar gilt $\mathcal{L}^n(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^k| < \mathcal{L}^n(E) + \frac{1}{k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.1 Das Lebesguemaß ist keineswegs das einzige Radonmaß auf \mathbb{R}^n . Ist zum Beispiel $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^n \sqcup E$ ein Radonmaß nach Satz 2.3.

Ein Maß μ auf \mathbb{R}^n heißt translationsinvariant, wenn mit $E + a = \{x + a : x \in E\}$ gilt:

$$\mu(E+a) = \mu(E)$$
 für alle $a \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$.

Aus der Translationsinvarianz des Elementarinhalts folgt sofort, dass \mathcal{L}^n diese Eigenschaft hat. Unser Ziel ist nun, das Lebesguemaß durch die Translationsinvarianz zu charakterisieren.

Lemma 3.1 Sei μ ein lokal endliches Borelma β . Ist μ translations invariant, so ist jede Koordinatenhyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$ eine μ -Nullmenge.

BEWEIS: Sei $F = \{x \in [0,1]^n : x_i = 0\}$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist F + a abgeschlossen, also μ -messbar. Wähle zu $k \in \mathbb{N}$ eine Menge $\{s_1, \ldots, s_k\} \subset [0,1]$, dann gilt

$$k\mu(F) = \sum_{j=1}^{k} \mu(F + s_j e_i) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} F + s_j e_i\right) \le \mu([0, 1]^n) < \infty.$$

Mit $k \to \infty$ folgt $\mu(F) = 0$. Aber $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\}$ ist Vereinigung von abzählbar vielen Translationen von F, also eine μ -Nullmenge.

Das folgende Lemma liefert für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Approximation, von innen bzw. außen, durch Vereinigungen von Würfeln in einem achsenparallelen Gitter. Insbesondere schneiden sich die Würfel nur in Koordinatenhyperebenen.

Lemma 3.2 (Gitterapproximation) Sei $W_k = \{Q_{k,m} = 2^{-k}(m + [0,1]^n) : m \in \mathbb{Z}^n\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Definiere für $E \subset \mathbb{R}^n$ die Mengen

$$F_k(E) = \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k : Q \subset E\}, \quad F^k(E) = \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k : Q \cap E \neq \emptyset\}.$$

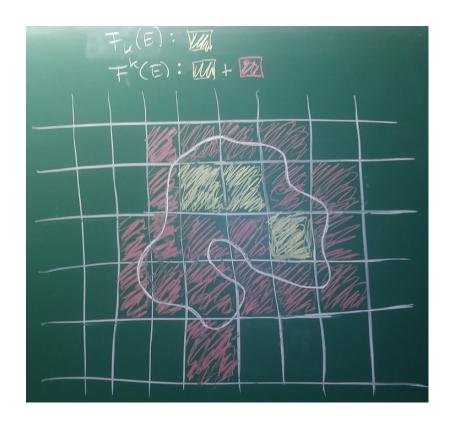
Dann ist $F_k(E)$ bzw. $F^k(E)$ abzählbare Vereinigung von Gitterwürfeln, mit Schnitt nur in Koordinatenhyperebenen. $F_k(E)$ bzw. $F^k(E)$ ist abgeschlossen, und es gilt:

(i)
$$F_1(E) \subset F_2(E) \subset \ldots \subset E$$
 und $F^1(E) \supset F^2(E) \supset \ldots \supset E$.

(ii)
$$F_k(E) \supset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k} \sqrt{n}\}$$

 $F^k(E) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, E) \le 2^{-k} \sqrt{n}\}.$

(iii)
$$\operatorname{int}(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(E) \subset E$$
 sowie $\overline{E} \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(E) \supset E$.



BEWEIS: Die Würfel in W_k sind kompakt, und nur endliche viele treffen eine Kugel $B_R(0)$; insbesondere sind $F_k(E)$ und $F^k(E)$ abgeschlossen. Nach Konstruktion schneiden sich zwei Würfel in W_k höchstens in einer Seite. Um die Inklusionen (i) zu zeigen, überlegen wir was beim Übergang zu W_{k+1} passiert. Der Würfel $Q_{k,m}$ wird durch Halbierung der Kanten in die 2^n Teilwürfel $Q_{k+1,2m+l}$ mit $l \in \{0,1\}^n$ zerlegt. Dabei gilt

$$Q_{k,m} \subset E \quad \Rightarrow \quad Q_{k+1,2m+l} \subset E, \quad \text{ also } F_k(E) \subset F_{k+1}(E);$$

$$Q_{k+1,2m+l} \cap E \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad Q_{k,m} \cap E \neq \emptyset, \quad \text{ also } F^k(E) \supset F^{k+1}(E).$$

Zu $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $Q \in \mathcal{W}_k$ mit $x \in Q$. Wegen diam $(Q) = 2^{-k} \sqrt{n}$ gilt

$$\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash E) > 2^{-k} \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad Q \subset E \quad \Rightarrow \quad x \in F_k(E).$$

Ist andererseits $x \in F^k(E)$, so ist $x \in Q$ für ein $Q \in \mathcal{W}_k$ mit $Q \cap E \neq \emptyset$, und es folgt

$$\operatorname{dist}(x, E) \le \operatorname{diam}(Q) \le 2^{-k} \sqrt{n}.$$

Damit ist (ii) gezeigt, und Behauptung (iii) folgt wegen

$$\operatorname{int}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 0\}$$
 sowie $\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, E) = 0\}.$

Satz 3.3 (Charakterisierung von \mathcal{L}^n) Jedes translationsinvariante Radonmaß auf \mathbb{R}^n hat die Form $\mu = \theta \mathcal{L}^n$ mit $\theta = \mu([0, 1]^n)$.

Beweis: Setze $Q_{k,j} = 2^{-k}(j + [0,1]^n)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{Z}^n$. Es gilt

$$[0,1]^n = \bigcup_{j \in J_k} Q_{k,j}$$
 mit $J_k = \{j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le j_i \le 2^k - 1\},$

Die $Q_{k,j}$, $j \in J_k$, schneiden sich nur in Koordinatenhyperebenen. Sei zunächst μ ein lokal endliches Borelmaß. Aus Lemma 3.1 folgt dann

$$\mu([0,1]^n) = \sum_{j \in J_k} \mu(Q_{k,j}), \quad \mathcal{L}^n([0,1]^n) = \sum_{j \in J_k} \mathcal{L}^n(Q_{k,j}).$$

Nun ist $\mu(Q_{k,j}) = \mu(Q_{k,0})$ und $\mathcal{L}^n(Q_{k,j}) = \mathcal{L}^n(Q_{k,0})$ wegen Translationsinvarianz, also

$$\theta = \frac{\mu([0,1]^n)}{\mathcal{L}^n([0,1]^n)} = \frac{\mu(Q_{k,0})}{\mathcal{L}^n(Q_{k,0})} = \frac{\mu(Q_{k,j})}{\mathcal{L}^n(Q_{k,j})} \quad \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}^n.$$

Daraus folgt mit Lemma 3.2, wobei auch Lemma 3.1 benutzt wird,

(3.3)
$$\mu(U) = \theta \mathcal{L}^n(U) \quad \text{für alle offenen } U \subset \mathbb{R}^n.$$

Sei jetzt μ Radonmaß. Mit Satz 2.4(1) folgt $\mu(E) = \theta \mathcal{L}^n(E)$ für alle $E \subset \mathbb{R}^n$.

Bis jetzt hatten wir es nur mit achsenparallelen Quadern zu tun. Es ist noch unklar, ob das Lebesguemaß von der Auszeichnung der Koordinatenachsen irgendwie abhängt, zum Beispiel ob es auch auf anderen Quadern das Volumen korrekt berechnet. Die folgende Anwendung von Satz 3.3 zerstreut aber diese Bedenken.

Satz 3.4 (Invarianz von \mathcal{L}^n unter \mathbb{O}_n) $F\ddot{u}r S \in \mathbb{O}_n$ gilt

$$\mathcal{L}^n(SE) = \mathcal{L}^n(E)$$
 für alle $E \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: Sei zunächst $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Für $\mu(E) = \mathcal{L}^n(SB)$ gilt

$$\mu(E+b) = \mathcal{L}^n(S(E+b)) = \mathcal{L}^n(SE+Sb) = \mathcal{L}^n(SE) = \mu(E).$$

Nun ist $\mu(\emptyset) = \mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$, sowie für $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\mu(A) = \mathcal{L}^n(SA) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(SA_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Weiter haben wir für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, da S bijektiv sowie SU offen und damit \mathcal{L}^n -messbar,

$$\mu(E \cap U) + \mu(E \setminus U) = \mathcal{L}^n \big(S(E \cap U) \big) + \mathcal{L}^n \big(S(E \setminus U) \big)$$
$$= \mathcal{L}^n (SE \cap SU) + \mathcal{L}^n (SE \setminus SU)$$
$$= \mathcal{L}^n (SE) = \mu(E).$$

Also ist μ Borelmaß, und $\mu(K) = \mathcal{L}^n(SK) < \infty$ für K kompakt. Mit (3.3) folgt

$$\mathcal{L}^n(SU) = \mu(U) = \theta(S)\mathcal{L}^n(U)$$
 für alle $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

wobei $\theta(S) = \mu([0,1]^n) = \mathcal{L}^n(S[0,1]^n)$. Nun ist \mathcal{L}^n Radonmaß nach Satz 3.2, also folgt aus Satz 2.4(1) für beliebige Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}^{n}(SE) = \inf\{\mathcal{L}^{n}(V) : V \supset SE \text{ offen}\}\$$

$$= \inf\{\mathcal{L}^{n}(SU) : U \supset E \text{ offen}\}\$$

$$= \theta(S)\inf\{\mathcal{L}^{n}(U) : U \supset E \text{ offen}\}\$$

$$= \theta(S)\mathcal{L}^{n}(E).$$

Im Fall $S \in \mathbb{O}_n$ setzen wir $E = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ein und erhalten

$$\theta(S)\mathcal{L}^n(B_1(0)) = \mathcal{L}^n(SB_1(0)) = \mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

Wegen $\mathcal{L}^n(B_1(0)) \in (0,\infty)$ folgt $\theta(S) = 1$ für $S \in \mathbb{O}_n$, der Satz ist bewiesen.

Wir wollen noch ausrechnen, wie sich das Maß unter beliebigen linearen Abbildungen transformiert. Dazu die folgende Tatsache aus der Linearen Algebra.

Lemma 3.3 (Polarzerlegung) Zu jedem $S \in GL_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0$ und $T_1, T_2 \in \mathbb{O}_n$, so dass $S = T_1 \Lambda T_2$.

BEWEIS: Die Matrix $S^{T}S$ ist symmetrisch und hat positive Eigenwerte, denn für $v \in \mathbb{R}^{n} \setminus \{0\}$ gilt $\langle S^{T}Sv, v \rangle = |Sv|^{2} > 0$. Also gibt es ein $T \in \mathbb{O}_{n}$ und eine Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n} > 0$, so dass gilt:

$$S^{\mathrm{T}}S = T\Lambda^2T^{-1}$$
.

 $R = T\Lambda T^{-1}$ ist dann symmetrisch mit $R^2 = S^{\mathrm{T}}S$, und $Q = SR^{-1}$ ist orthogonal wegen

$$Q^{\mathrm{T}}Q = (R^{-1})^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}SR^{-1} = R^{-1}R^{2}R^{-1} = \mathbf{E}_{n}.$$

Es folgt $S = QR = QT\Lambda T^{-1} = T_1\Lambda T_2$ für $T_1 = QT$ und $T_2 = T^{-1}$ wie verlangt.

Satz 3.5 (Lineare Transformationsformel) Für eine lineare Abbildung $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qilt

$$\mathcal{L}^n(S(E)) = |\det(S)| \mathcal{L}^n(E)$$
 für alle $E \subset \mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Jede Hyperebene ist Bild einer Koordinatenhyperebene unter einer orthogonalen Abbildung, hat also \mathcal{L}^n -Maß Null nach Lemma 3.1 und Satz 3.4. Im Fall $\det(S) = 0$ folgt also $\mathcal{L}^n(S(E)) = 0$. Für $\det(S) \neq 0$ haben wir aus dem Beweis von Satz 3.4

$$\mathcal{L}^n(SE) = \theta(S)\mathcal{L}^n(E) \quad \text{mit } \theta(S) = \mathcal{L}^n(S[0,1]^n).$$

Für eine Diagonalmatrix Λ mit positiven Einträgen $\lambda_i > 0$ berechnen wir

$$\theta(\Lambda) = \mathcal{L}^n(\Lambda([0,1]^n) = \mathcal{L}^n([0,\lambda_1] \times \ldots \times [0,\lambda_n]) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = |\det(\Lambda)|.$$

Für S beliebig sei $S = T_1\Lambda T_2$ mit einer Diagonalmatrix Λ und $T_1, T_2 \in \mathbb{O}_n$ wie in Lemma 3.3. Aus den schon bekannten Aussagen für orthogonale sowie Diagonalmatrizen folgt

$$\theta(S) = \mathcal{L}^n(T_1 \Lambda T_2([0,1]^n)) = |\det(\Lambda)| = |\det(S)|,$$

und der Satz ist bewiesen.

Beispiel 3.2 (Volumen eines Ellipsoids) Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ ist die Menge

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{x_1}{\lambda_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n} \right)^2 < 1 \right\}$$

ein Ellipsoid mit den Halbachsen $\lambda_i > 0$. Mit $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ gilt $E = \Lambda(B_1(0))$, wobei $\Lambda \in Gl_n(\mathbb{R})$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen λ_i ist. Aus Satz 3.5 folgt

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(\Lambda(B_1(0))) = (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n) \mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

Wir haben gesehen, dass eine hinreichend große Klasse von Mengen Lebesgue-messbar ist, insbesondere alle Borelmengen. Es ist aber so dass nicht alle Mengen messbar sind, und dafür geben wir am Ende des Kapitels ein Standardbeispiel.

Beispiel 3.3 (Vitali 1905) Es gibt eine Menge $S \subset [0,1]$, die nicht \mathcal{L}^1 -messbar ist. Betrachte dazu auf [0,1] die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Mit dem Auswahlaxiom der Mengenlehre erhalten wir ein Repräsentantensystem $S \subset [0,1]$ für die Relation \sim , d. h. zu jedem $y \in [0,1]$ gibt es genau ein $x \in S$ mit $x \sim y$, also y = q + x mit einem $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Sei q_1, q_2, \ldots eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Es gilt

$$(q_j + S) \cap (q_k + S) = \emptyset$$
 für $j \neq k$.

Andernfalls gibt es $x_1, x_2 \in S$ mit $q_j + x_1 = q_k + x_2$, also $x_2 - x_1 = q_j - q_k \in \mathbb{Q}$. Nach Definition von S folgt $x_1 = x_2$, also $q_j = q_k$, Widerspruch. Wir haben nun

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k + S) \subset [-1,2].$$

Wäre $\mathcal{L}^1(S) = 0$, so folgt $1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(q_k + S) = 0$, ein Widerspruch. Angenommen S ist messbar, dann folgt aus der endlichen Additivität, siehe Lemma 1.1,

$$N\mathcal{L}^{1}(S) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{L}^{1}(q_{k} + S) = \mathcal{L}^{1}\left(\bigcup_{k=1}^{N} (q_{k} + S)\right) \le \mathcal{L}^{1}([-1, 2]) = 3.$$

Das ist ein Widerspruch für N hinreichend groß.

4 Das Lebesgueintegral

Sei μ ein gegebenes äußeres Maß auf einer beliebigen Menge X, und sei $f:X\to [-\infty,\infty]$ eine Funktion. Ziel dieses Kapitels ist die Definition des Integrals $\int_X f\,d\mu$ nach Henri Lebesgue. Sein Zugang ist allgemein, es werden keine weiteren Informationen über X oder μ benötigt. Andererseits ergibt sich im speziellen Fall X=[a,b] und $\mu=\mathcal{L}^1$ eine Alternative zum Riemannschen Integral. Oft wird gesagt, dass mit der Definition von Lebesgue im Vergleich mehr Funktionen integriert werden könnten. Das ist auch tatsächlich so, aber der zentrale Vorteil liegt aus meiner Sicht in den stärkeren Konvergenzsätzen, diese werden wir im nächsten Kapitel diskutieren.

Im gesamten Kapitel ist μ ein gegebenes äußeres Maß auf einer Menge X, und \mathcal{M} bezeichnet die σ -Algebra der μ -messbaren Teilmengen von X, vergleiche Satz 1.3.

Definition 4.1 (messbare Funktion) $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar (bezüglich μ), falls gilt:

- (i) $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ für alle $U \subset \mathbb{R}$ offen,
- (ii) $f^{-1}\{\infty\} \in \mathcal{M} \text{ und } f^{-1}\{-\infty\} \in \mathcal{M}.$

Eine reellwertige Funktion kann natürlich als $\overline{\mathbb{R}}$ -wertig aufgefasst werden. Die Frage ihrer Messbarkeit reduziert sich dann auf Bedingung (i) in Definition 4.1. Das nächste Lemma ist nützlich zum Nachweis der Messbarkeit von Funktionen.

Lemma 4.1 (Messbarkeitskriterium) Für $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

- (i) f ist μ -messbar.
- (ii) $\{f < s\} = \{x \in X : f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{M} \text{ für alle } s \in \mathbb{R}.$
- (iii) $\{f \leq s\} = \{x \in X : f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{M} \text{ für alle } s \in \mathbb{R}.$
- (iv) $\{f > s\} = \{x \in X : f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{M} \text{ für alle } s \in \mathbb{R}.$
- (v) $\{f \ge s\} = \{x \in X : f(x) \in [s, \infty)\} \in \mathcal{M} \text{ für alle } s \in \mathbb{R}.$

BEWEIS: Aus (i) folgt (ii) wegen $\{f < s\} = f^{-1}(-\infty, s) \cup f^{-1}\{-\infty\}$. Aus den folgenden Gleichungen ergibt sich, dass (ii) bis (v) untereinander äquivalent sind:

$$\{f \le s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < s + \frac{1}{k}\}, \quad \{f > s\} = X \setminus \{f \le s\},$$

$$\{f \ge s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > s - \frac{1}{k}\}, \qquad \{f < s\} = X \setminus \{f \ge s\}.$$

Es gelte nun eine und damit jede der Aussagen (ii) bis (v). Für ein kompaktes Intervall [a, b] ist dann $f^{-1}([a, b]) = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\} \in \mathcal{M}$. Da sich nach Lemma 3.2 jede offene Menge

 $U \subset \mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ von kompakten Intervallen darstellen lässt, ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{M}$. Ferner haben wir

$$f^{-1}\{\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > k\}$$
 und $f^{-1}\{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < -k\}.$

Also ist f μ -messbar nach Definition 4.1.

Allgemein gilt folgende Tatsache: ist \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und $f: X \to Y$, so ist das System $\{B \subset Y: f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ wieder eine σ -Algebra. Für $f: X \to \mathbb{R}$ messbar ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ für alle offenen und damit auch für alle Borelmengen $B \subset \mathbb{R}$; Urbilder von Borelmengen sind also messbar.

In folgendem Satz sind die Grenzfunktionen punktweise definiert, zum Beispiel ist

$$\liminf_{k \to \infty} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}, \ (\liminf_{k \to \infty} f_k)(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x).$$

Punktweise Konvergenz ist eine sehr schwache Form der Konvergenz, unter der sich Eigenschaften wie Stetigkeit oder Riemann-Integrierbarkeit nicht notwendig auf den Grenzwert übertragen.

Satz 4.1 (Grenzwerte messbarer Funktionen) Sei $f_k: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge von messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \to \infty} f_k, \limsup_{k \to \infty} f_k.$$

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\inf_{k} f_k \ge s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \ge s\}, \quad \{\sup_{k} f_k \le s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \le s\}.$$

Nach Lemma 4.1 sind $\inf_k f_k$ und $\sup_k f_k$ also messbar, und damit auch die Funktionen

$$\liminf_{k \to \infty} f_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{l \ge k} f_l), \quad \limsup_{k \to \infty} f_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{l \ge k} f_l).$$

Für $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ ist der Positiv- bzw. Negativanteil $f^\pm:X\to[0,\infty]$ definiert durch

$$(4.1) f^+ = \max(f, 0) \ge 0 \text{und} f^- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \ge 0.$$

Es gilt also $f = f^{+} - f^{-}$ und $|f| = f^{+} + f^{-}$.

Satz 4.2 (Messbarkeit und Rechenoperationen) Seien $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind auch folgende Funktionen messbar, falls sie definiert sind:

$$f+g, \alpha f \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, f^{\pm}, \max(f,g), \min(f,g), |f|, fg, f/g.$$

BEWEIS: Wir nehmen zunächst an, dass f, g nur Werte in \mathbb{R} annehmen. Es gilt

$$\{f + g < t\} = \bigcup_{r, s \in \mathbb{O}, r + s < t} \{f < r\} \cap \{g < s\}, \quad \{-f < t\} = \{f > -t\}.$$

Nach Lemma 4.1 sind also f + g und -f messbar, ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Für jedes $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ ist die Verkettung $\varphi \circ f$ messbar, denn für $U \subset \mathbb{R}$ offen ist $\varphi^{-1}(U)$ offen (Analysis II, Satz 1.4), und folglich $(\varphi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ messbar. Damit ergibt sich die Messbarkeit der Funktionen f^{\pm} , indem wir $\varphi(s) = \max(\pm s, 0)$ wählen. Weiter sind dann die Funktionen

$$|f| = f^+ + f^-, \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und } \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

messbar. Nun ist $f^2 = \varphi \circ f$ mit $\varphi(s) = s^2$, also folgt die Messbarkeit von f^2 und von

$$fg = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Schließlich ist auch 1/g messbar, denn

$$\{1/g < s\} = \begin{cases} \{1/s < g < 0\} & s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > 1/s\} & s > 0. \end{cases}$$

Nimmt nun f (bzw. g) den Wert ∞ oder $-\infty$ an, so betrachte die abgeschnittene Funktion

$$f_k(x) = \begin{cases} k & f(x) \ge k \\ -k & f(x) \le -k \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen f_k , g_k sind messbar. Man prüft nach, dass die Funktionen

$$f_k + g_k, \, \alpha f_k, \, f_k^{\pm}, \, \max(f_k, g_k), \, \min(f_k, g_k), |f_k|, \, f_k g_k, \, f_k/g_k$$

punktweise gegen die entsprechenden Funktionen für f und g konvergieren, auch im Fall des (unstetigen) Produkts. Also folgt die allgemeine Behauptung aus Satz 4.1.

Folgerung 4.1 Für $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar sind $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ in \mathcal{M} , also messbare Mengen.

BEWEIS: Es gilt $\{f < g\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} (\{f < s\} \cap \{g > s\}) \in \mathcal{M}$. Die weiteren Aussagen folgen wie in Lemma 4.1.

Definition 4.2 (Treppenfunktion) Eine Funktion $\varphi: X \to \mathbb{R}$ heißt μ -Treppenfunktion, wenn sie messbar ist und nur endlich viele Funktionswerte annimmt. Nach Satz 4.2 ist die Menge $\mathcal{T}(\mu)$ der μ -Treppenfunktionen ein \mathbb{R} -Vektorraum. Wir setzen

$$\mathcal{T}^+(\mu) = \{ \varphi \in \mathcal{T}(\mu) : \varphi \ge 0 \}.$$

Beispiel 4.1 Für $E \subset X$ heißt die Funktion

$$\chi_E: X \to \mathbb{R}, \ \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von E (alternativ: Indikatorfunktion $\mathbf{1}_E$). Diese Funktion ist genau dann eine μ -Treppenfunktion, wenn $E \in \mathcal{M}$.

Für Treppenfunktionen $\varphi \geq 0$ definieren wir nun elementar, ohne Grenzprozess, ein Integral. Sei dazu eine Darstellung $\varphi = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{A_i}$ gegeben mit A_i messbar und $s_i \geq 0$, und so dass die A_i paarweise disjunkt sind. Eine solche Darstellung nennt man einfach (Englisch: simple), weil kein Punkt mehrfach getroffen wird. Wir setzen

(4.2)
$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} s_i \mu(A_i).$$

Für $\varphi = 0$ ergibt sich $I(\varphi) = 0 \cdot \mu(\mathbb{R}^n) = 0$. Allgemein hat jedes $\varphi \in \mathcal{T}^+(\mu)$ eine solche einfache Darstellung, wir können zum Beispiel für s_i die endlich vielen Funktionswerte und $A_i = \{\varphi = s_i\}$ wählen. Allerdings ist eine einfache Darstellung in der Regel nicht eindeutig bestimmt.

Lemma 4.2 (Eigenschaften des Integrals auf $\mathcal{T}^+(\mu)$) Das Integral $I: \mathcal{T}^+(\mu) \to [0, \infty]$ ist durch (4.2) wohldefiniert. Für $\varphi, \psi \in \mathcal{T}^+(\mu)$ und $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ gilt:

- (i) $I(\alpha \varphi + \beta \psi) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi)$.
- (ii) $\varphi < \psi \implies I(\varphi) < I(\psi)$.

BEWEIS: Sei $\varphi = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{A_i}$ eine einfache Darstellung. Dann gilt $\{\varphi > 0\} = \bigcup_{i:s_i > 0} A_i$. Ist $\mu(\{\varphi > 0\}) = \infty$, so folgt $s_i \mu(A_i) = \infty$ für mindestens ein i und damit $I(\varphi) = \infty$. Sei nun $\mu(\{\varphi > 0\}) < \infty$ und $\varphi = \sum_{j=1}^l t_j \chi_{B_j}$ eine andere einfache Darstellung. Dann sind die Mengen $A_i \cap B_j$ messbar und paarweise disjunkt, und es gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} - \sum_{j=1}^{l} \beta_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha_i - \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Für $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ist also $\alpha_i = \beta_j$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) - \sum_{j=1}^{l} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha_i - \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = 0.$$

Somit ist $I(\varphi)$ wohldefiniert. Seien nun $\varphi = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{A_i}$ und $\psi = \sum_{j=1}^l t_j \chi_{B_j}$ einfache Darstellungen von $\varphi, \psi \in \mathcal{T}^+(\mu)$. Dann gilt für $\alpha, \beta \geq 0$

$$\alpha \varphi + \beta \psi = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha s_i + \beta t_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Das ist eine einfache Darstellung, also folgt

$$I(\alpha \varphi + \beta \psi) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha s_i + \beta t_j) \mu(A_i \cap B_j) = \alpha I(\varphi) + \beta I(\psi).$$

Damit ist Behauptung (i) gezeigt. In (ii) gilt $\psi - \varphi \in \mathcal{T}^+(\mu)$, und aus (i) folgt

$$I(\psi) = I(\varphi + (\psi - \varphi)) = I(\varphi) + I(\psi - \varphi) \ge I(\varphi).$$

Für A_i messbar und $s_i \ge 0$ folgt aus Lemma 4.2(i), auch für A_i nicht disjunkt,

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} s_i \mu(A_i)$$
 für $\varphi = \sum_{i=1}^{k} s_i \chi_{A_i}$.

Die Definition des Integrals geschieht nun in zwei Schritten.

Definition 4.3 (Lebesgueintegral) Für $f: X \to [0, \infty]$ μ -messbar setzen wir

$$\int f d\mu = \sup \{ I(\varphi) : \varphi \in \mathcal{T}^+(\mu), \, \varphi \le f \}.$$

In diesem Zusammenhang heißt φ Unterfunktion von f. Ist $f: X \to [-\infty, \infty]$ und sind die Integrale von f^{\pm} nicht beide unendlich, so setzen wir weiter

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in [-\infty, \infty].$$

Für $f \ge 0$ sind die Schritte kompatibel, denn dann gilt $f^+ = f$ und $f^- = 0$.

Folgerung 4.2 (Integral für nichtnegative Treppenfunktionen) Für $f \in \mathcal{T}^+(\mu)$ gilt

$$\int f \, d\mu = I(f).$$

BEWEIS: f ist selbst Unterfunktion von f, also ist $\int f d\mu \ge I(f)$. Nach Lemma 4.2(ii) haben wir andererseits $I(\varphi) \le I(f)$ für jede Unterfunktion.

Beispiel 4.2 Die Funktion $\chi_{\mathbb{O}} \geq 0$ ist eine \mathcal{L}^1 -Treppenfunktion, und es gilt

$$\int \chi_{\mathbb{Q}} d\mathcal{L}^1 = 0 \cdot \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) + 1 \cdot \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0.$$

Definition 4.4 (Integrierbarkeit) Eine Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar bzgl. μ , wenn sie μ -messbar ist und wenn gilt:

$$\int f \, d\mu \in \mathbb{R} \quad oder \ \ddot{a}quivalent \quad \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < \infty.$$

Beispiel 4.3 Wir betrachten hier das Zählmaß, siehe Beispiel 1.2, auf dem Raum $X = \mathbb{N}_0$. Wir zeigen: eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist genau dann bzgl. card auf \mathbb{N}_0 integrierbar, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ absolut konvergiert, und dann gilt

(4.3)
$$\int f \, d\text{card} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Eine nur bedingt konvergente Reihe wie $\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ ist also kein Lebesgueintegral bezüglich card. Wir zeigen (4.3) erst für Funktionen $f: \mathbb{N}_0 \to [0, \infty]$. Dazu betrachten wir

$$f_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, f_n(k) = \begin{cases} f(k) & \text{falls } k \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die f_n sind Unterfunktionen von f mit $I(f_n) = \sum_{k=0}^n f(k)$. Also folgt

$$\int f \, d\text{card} \ge \lim_{n \to \infty} I(f_n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Für die umgekehrte Ungleichung sei ohne Einschränkung $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) < \infty$, somit $f(k) \to 0$ mit $k \to \infty$. Ist dann φ Unterfunktion von f, so ist $\varphi(k) \neq 0$ nur für endlich viele k und folglich $\varphi \leq f_n$ für n hinreichend groß. Es folgt

$$I(\varphi) \le I(f_n) = \sum_{k=0}^n f(k) \le \sum_{k=0}^\infty f(k),$$
 also $\int f \, d\text{card} \le \sum_{k=0}^\infty f(k).$

Die Äquivalenz von Integrierbarkeit und absoluter Konvergenz folgt aus

$$\int f^{+} d\operatorname{card} + \int f^{-} d\operatorname{card} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{+}(k) + \sum_{k=0}^{\infty} f^{-}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|,$$

und weiter erhält man

$$\int f \, d\text{card} = \int f^+ \, d\text{card} - \int f^- \, d\text{card} = \sum_{k=0}^{\infty} f^+(k) - \sum_{k=0}^{\infty} f^-(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Es kommt in der Maßtheorie oft vor, dass eine Aussage nur für Punkte außerhalb einer μ Nullmenge gebraucht wird, oder nur dort gezeigt werden kann. Man sagt, die Aussage A[x]ist wahr für μ -fast-alle $x \in M$ oder μ -fast-überall auf M, falls

$$\mu(\lbrace x \in M : A[x] \text{ ist falsch} \rbrace) = 0.$$

Satz 4.3 (Monotonie des Integrals) Seien $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar bzgl. μ . Ist $f \leq g$ μ fast-überall und $\int f^- d\mu < \infty$, so existieren beide Integrale und es gilt

$$\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu.$$

Die Aussage mit \geq ist entsprechend wenn $\int f^+ d\mu < \infty$.

BEWEIS: Es sei zunächst $f,g \geq 0$. Ist $\varphi = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{A_i}$ eine Unterfunktion von f, so ist $\psi := \chi_{\{f \leq g\}} \varphi = \sum_{i=1}^k s_i \chi_{\{f \leq g\} \cap A_i}$ eine Unterfunktion von g, also gilt

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} s_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(\{f \le g\} \cap A_i) = I(\psi) \le \int g \, d\mu.$$

Nehmen wir das Supremum über alle φ , so folgt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. Für f,g beliebig gilt

$$f^+ > g^+ \Rightarrow f = f^+ > g^+ \ge g,$$

 $f^- < g^- \Rightarrow f \ge -f^- > -g^- = g.$

Aus $f \leq g$ folgt also $f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$ fast überall, das heißt

$$\int f^+ d\mu \le \int g^+ d\mu \quad \text{und} \quad \infty > \int f^- d\mu \ge \int g^- d\mu.$$

Es ergibt sich

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \le \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Bemerkung 4.1 Seien $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist f messbar und gilt g = f außerhalb einer Nullmenge N, so ist g ebenfalls messbar. Denn für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{g < s\} \backslash N = \{f < s\} \backslash N \quad \text{ und } \quad \mu(\{g < s\} \cap N) = 0.$$

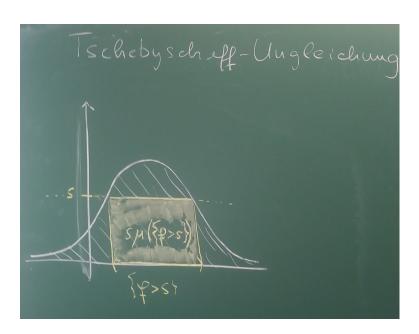
Aus Satz 4.3 folgt $\int g^{\pm} d\mu = \int f^{\pm} d\mu$, und $\int f d\mu = \int g d\mu$ falls eines der Integrale existiert.

Lemma 4.3 (Tschebyscheff-Ungleichung) Für eine μ -messbare Funktion $f: X \to [0, \infty]$ mit $\int f d\mu < \infty$ gilt

$$\mu(\{f \ge s\}) \le \begin{cases} \frac{1}{s} \int f \, d\mu & \text{ für } s \in (0, \infty), \\ 0 & \text{ für } s = \infty. \end{cases}$$

BEWEIS: Für $s \in (0, \infty)$ ist die Funktion $s\chi_{\{f \geq s\}}$ eine Unterfunktion von f, also folgt

$$s\,\mu(\{f=\infty\})\leq s\,\mu(\{f\geq s\})=I(s\chi_{\{f\geq s\}})\leq \int f\,d\mu.$$



Folgerung 4.3 Die Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei μ -messbar.

- (i) Ist $\int f d\mu < \infty$, so ist $\{f = \infty\}$ eine μ -Nullmenge.
- (ii) Ist $f \ge 0$ und $\int f d\mu = 0$, so ist $\{f > 0\}$ eine μ -Nullmenge.

BEWEIS: Aussage (i) folgt mit $s=\infty$ aus Lemma 4.3, angewandt auf f^+ . In (ii) schließen wir $\mu(\{f\geq s\})=0$ für s>0 aus Lemma 4.3, also $\mu(\{f>0\})=0$ mit Satz 1.4(i). \square Um die Linearität des Integrals zu beweisen, wollen wir eine Approximation durch Treppenfunktionen verwenden. Dazu konstruieren wir nun eine approximierende Folge.

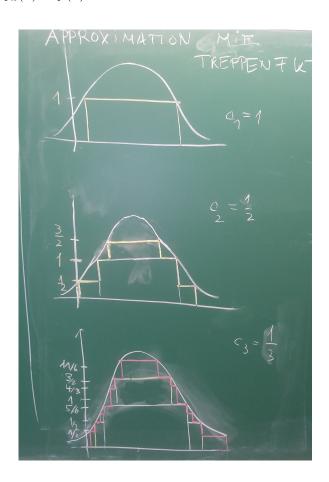
Satz 4.4 (Approximation durch Treppenfunktionen) Zu $f: X \to [0, \infty]$ messbar gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit

$$f_0 \le f_1 \le \dots$$
 und $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

BEWEIS: Sei $c_k > 0$ eine Nullfolge mit $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$, zum Beispiel $c_k = 1/k$. Wir setzen $f_0 = 0$ und definieren für $k \ge 1$ induktiv $E_k = \{f_{k-1} + c_k \le f\}$ sowie

$$f_k = f_{k-1} + c_k \chi_{E_k} \quad \Rightarrow \quad f_k = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}.$$

Die f_k sind Treppenfunktionen mit $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$ und $f_k \leq f$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$: ist $x \in E_k$, so gilt $f_k(x) = f_{k-1}(x) + c_k \leq f(x)$ nach Definition, für $x \notin E_k$ folgt $f_k(x) = f_{k-1}(x) \leq f(x)$ per Induktion. Insbesondere gilt $\lim_{k \to \infty} f_k(x) \leq f(x)$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, gibt es im Fall $\lim_{k \to \infty} f_k(x) < \infty$ unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $x \notin E_k$ bzw. $f_{k-1}(x) > f(x) - c_k$, und es folgt $\lim_{k \to \infty} f_k(x) \geq f(x)$.



Wir müssen sicherstellen, dass bei unserer Approximation die Integrale auch konvergieren. Allein aus der punktweisen Konvergenz, also $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$, folgt das noch nicht. Die Frage, welche zusätzlichen Bedingungen hinreichend sind, ist fundamental und wird im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert. Hier jedenfalls ein erstes Resultat.

Satz 4.5 (monotone Konvergenz) † Seien $f_k: X \to [0, \infty]$ μ -messbar mit $f_1 \le f_2 \le \dots$ Definiere $f: X \to [0, \infty]$ durch $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

[†]Beppo Levi, 1875–1961

Beweis: Die Funktion f ist μ -messbar nach Satz 4.1. Mit Satz 4.3 gilt

$$0 \le \int f_1 d\mu \le \int f_2 d\mu \le \ldots \le \int f d\mu$$
, also $\lim_{k \to \infty} \int f_k d\mu \le \int f d\mu$.

Sei φ eine Unterfunktion von f mit Wertemenge $\{s_1, \ldots, s_m\}$. Setze $E_i = \{\varphi = s_i\}$ für $i = 1, \ldots, m$ und betrachte für einen Parameter $\theta \in (0, 1)$ die Mengen

$$E_{i,k} = E_i \cap \{f_k \ge \theta s_i\}.$$

Die Funktion $\sum_{i=1}^m \theta s_i \chi_{E_{i,k}}$ ist eine Unterfunktion von f_k , und mit Lemma 4.2 folgt

$$\sum_{i=1}^{m} \theta s_i \, \mu(E_{i,k}) = I\left(\sum_{i=1}^{m} \theta s_i \, \chi_{E_{i,k}}\right) \le \int f_k \, d\mu.$$

Nun gilt $E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{i,k}$, denn für $s_i > 0$ ist $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \ge s_i > \theta s_i$ für alle $x \in E_i$. Da außerdem $E_{i,1} \subset E_{i,2} \subset \ldots$, folgt aus der Stetigkeit des Maßes von unten, siehe 1.4(i), die Gleichung $\mu(E_i) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_{i,k})$ und somit

$$\theta I(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \theta s_i \, \mu(E_i) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \theta s_i \, \mu(E_{i,k}) \le \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Mit $\theta \nearrow 1$ und Bildung des Supremums über alle Unterfunktionen φ folgt

$$\int f \, d\mu \le \lim_{k \to \infty} \int f_k.$$

Nun endlich zu unserem Ausgangsproblem.

Satz 4.6 (Linearität des Integrals) Sind $f, g: X \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich μ , so ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und es gilt

(4.4)
$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

BEWEIS: Als erstes sei $f \ge 0$ und $\alpha > 0$, wir zeigen $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$. Ist φ Unterfunktion von f, so ist $\alpha \varphi$ Unterfunktion von αf und aus Lemma 4.2(i) folgt

$$\alpha I(\varphi) = I(\alpha \varphi) \le \int (\alpha f) \, d\mu, \quad \text{also } \alpha \int f \, d\mu \le \int (\alpha f) \, d\mu.$$

Ersetzen wir α durch $1/\alpha$ und f durch αf , so folgt die umgekehrte Ungleichung und damit die Behauptung. Ist f integrierbar, aber wieder $\alpha > 0$, so gilt $(\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm}$, und dann folgt

$$\int (\alpha f) d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

Schließlich ist $(-f)^{\pm} = f^{\mp}$ und damit

$$\int (-f) \, d\mu = \int f^- \, d\mu - \int f^+ \, d\mu = -\Big(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu\Big) = -\int f \, d\mu.$$

Es bleibt, die Linearität für f + g zu zeigen. Sind $f, g \ge 0$, so gibt es nach Satz 4.4 Folgen $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $\varphi_k \nearrow f$ und $\psi_k \nearrow g$ punktweise auf X, also $\varphi_k + \psi_k \nearrow f + g$. Mit dem Satz über monotone Konvergenz, Satz 4.5, und Lemma 4.2(i) folgt

$$\int (f+g) \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int (\varphi_k + \psi_k) \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \left(\int \varphi_k \, d\mu + \int \psi_k \, d\mu \right) = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Seien nun $f, g: X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Da $(f+g)^+ \le f^+ + g^+$ und $(f+g)^- \le f^- + g^-$, ist f+g integrierbar nach Satz 4.3. Nun ist

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

also nach Umstellen

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Wir integrieren auf beiden Seiten, und verwenden die Linearität im nichtnegativen Fall,

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Es folgt, indem wir zurück umstellen,

$$\int (f+g) \, d\mu = \int (f+g)^+ \, d\mu - \int (f+g)^- \, d\mu
= \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu
= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Wenn die Integrale von $f, g: X \to \mathbb{R}$ existieren aber eventuell nicht endlich sind, können auch Aussagen gemacht werden. Sei zum Beispiel $\int f d\mu = \infty$, dann gilt

$$\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu = \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha > 0, \\ 0 & \text{für } \alpha = 0, \\ -\infty & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

Ist außerdem $\int g d\mu > -\infty$, so folgt

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu = \infty.$$

Für Funktionen f, g mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ ist f(x) + g(x) unter Umständen nicht definiert. Ist aber zum Beispiel f integrierbar, so ist die Menge $N = \{x \in X : f(x) = \pm \infty\}$ eine Nullmenge nach Folgerung 4.3. Die Funktion

$$\tilde{f}: X \to \mathbb{R}, \ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{falls } f(x) = \pm \infty \end{cases}$$

ist dann messbar mit gleichem Integral wie f, vgl. Bemerkung 4.1. Ist g ebenfalls integrierbar und \tilde{g} analog definiert, so folgt

$$\int (\tilde{f} + \tilde{g}) d\mu = \int \tilde{f} d\mu + \int \tilde{g} d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

und $\tilde{f} + \tilde{g} = f + g$ außer in einer Nullmenge.

Definition 4.5 (Integration über Teilmengen) Sei μ ein Ma β auf X und $E \subset X$ sei μ -messbar. Dann setzen wir, wenn das rechte Integral existiert,

$$\int_{E} f \, d\mu = \int f \chi_{E} \, d\mu.$$

f heißt auf E integrierbar, wenn die Funktion $f\chi_E$ integrierbar ist.

Wegen $(f\chi_E)^{\pm} = f^{\pm}\chi_E \leq f^{\pm}$ existiert das Integral von f über E auf jeden Fall dann, wenn das Integral von f über ganz X existiert. Insbesondere ist das Integral von f über E stets definiert, wenn f nichtnegativ ist.

Beispiel 4.4 Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{-\alpha}$. Wir behaupten:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f \, d\mathcal{L}^n < \infty \iff \alpha > n, \quad \text{ und } \quad \int_{B_1(0)} f \, d\mathcal{L}^n < \infty \iff \alpha < n.$$

Zum Beweis vergleichen wir f mit der Funktion

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\alpha} \chi_{A_k}$$
 mit $A_k = \{2^k \le |x| < 2^{k+1}\}.$

Auf A_k ist $2^{-(k+1)\alpha} \le f \le 2^{-k\alpha}$ wenn $\alpha \ge 0$, und $2^{-(k+1)\alpha} \ge f \ge 2^{-k\alpha}$ für $\alpha \le 0$. Es folgt

$$2^{-\alpha}g \leq f \leq g \text{ für } \alpha \geq 0 \quad \text{ bzw.} \quad 2^{-\alpha}g \geq f \geq g \text{ für } \alpha \leq 0.$$

Wegen der Monotonie des Integrals reicht es also aus, die Aussagen für g zu zeigen. Da $A_k = 2^k A_0$, folgt aus der Transformation von \mathcal{L}^n unter Streckungen, vgl. Satz 3.4,

$$\mathcal{L}^n(A_k) = (2^k)^n \mathcal{L}^n(A_0) = 2^{nk} \gamma_n \quad \text{mit } \gamma_n = \mathcal{L}^n(A_0) \in (0, \infty).$$

Da die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{l} 2^{-k\alpha} \chi_{A_k}$ punktweise auf \mathbb{R}^n gegen $g\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}$ konvergiert, folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz

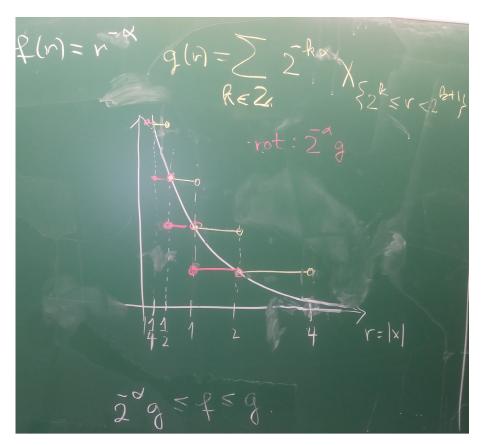
$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_1(0)} g \, d\mathcal{L}^n = \sum_{k=0}^\infty \int 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \, d\mathcal{L}^n = \gamma_n \sum_{k=0}^\infty 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} \frac{\gamma_n}{1-2^{n-\alpha}} & \text{falls } \alpha > n \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ganz entsprechend erhalten wir auf $B_1(0)$

$$\int_{B_1(0)} g \, d\mathcal{L}^n = \sum_{k=-1}^{-\infty} \int 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \, d\mathcal{L}^n = \gamma_n \sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} \frac{\gamma_n}{2^{n-\alpha}-1} & \text{falls } \alpha < n \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist die Behauptung von Beispiel 4.4 gezeigt.

Das folgende Integrierbarkeitskriterium (iii) wird sehr oft benutzt, meistens ohne extra erwähnt zu werden.



Satz 4.7 (Majorantenkriterium) Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ -messbar.

(i) f integrierbar \Leftrightarrow |f| integrierbar.

- (ii) Es gilt $|\int f d\mu| \le \int |f| d\mu$, wenn das Integral von f existiert.
- (iii) Ist $g:X\to [0,\infty]$ μ -messbar mit $|f|\le g$ μ -fast-überall und $\int g\,d\mu<\infty$, so ist f integrierbar.

BEWEIS: Aussage (i) folgt aus Satz 4.3 wegen $f^{\pm} \leq |f| = f^+ + f^-$. Ist das Integral von f definiert, so gilt weiter

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \le \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

Ist schließlich g wie in (iii), so folgt $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$ aus Satz 4.3 und damit die Integrierbarkeit von f.

Mit dem Majorantenkriterium und Beispiel 4.4 folgt, dass allgemein Funktionen integrierbar sind, die durch eine geeignete Potenz $|x|^{-\alpha}$ abgeschätzt sind, genauer:

Beispiel 4.5 Ist $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ \mathcal{L}^n -messbar und gilt für eine Konstante $C \in [0, \infty)$

$$|f(x)| \le C |x|^{-\alpha}$$
 fast überall in $B_{\varepsilon}(0)$ mit $\alpha < n$, bzw.

$$|f(x)| \le C|x|^{-\alpha}$$
 fast überall in $\mathbb{R}^n \backslash B_R(0)$ mit $\alpha > n$,

so ist f auf $B_{\varepsilon}(0)$ bzw. auf $\mathbb{R}^n \backslash B_R(0)$ integrierbar.

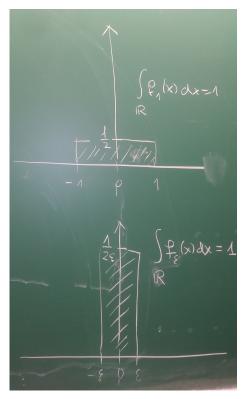
5 Konvergenzsätze

Sei $f_k:X\to\mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gegen eine Funktion $f:X\to\mathbb{R}$ konvergiert. Welche Voraussetzungen sind an die Qualität der Konvergenz $f_k\to f$ zu stellen, damit der Grenzübergang mit dem Integral vertauscht werden kann, das heißt damit gilt:

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Die Konvergenzsätze von B. Levi und H. Lebesgue geben mit der monotonen Konvergenz bzw. der dominierten Konvergenz hinreichende Bedingungen an, die wesentlich schwächer sind als die beim Riemannintegral benötigte gleichmäßige Konvergenz. Der Satz über dominierte Konvergenz liefert (unter anderem) folgendes zentrale Resultat von Riesz-Fischer: der Raum der integrierbaren Funktionen – modulo Gleichheit fast überall – ist mit der Integralnorm ein Banachraum.

Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ reicht im allgemeinen nicht aus, um das Integral mit dem Grenzwert zu vertauschen.



Beispiel 5.1 Betrachte für $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_{\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$. Es gilt $f_{\varepsilon}(x) = 0$ für $\varepsilon < |x|$, also ist der punktweise Grenzwert

$$f(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Andererseits haben wir $\int f_{\varepsilon} d\mathcal{L}^1 = \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{L}^1([-\varepsilon, \varepsilon]) = 1$ für alle $\varepsilon > 0$, das heißt

$$\int f \, d\mathcal{L}^1 = 0 < 1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int f_{\varepsilon} \, d\mathcal{L}^1.$$

Dass $f_{\varepsilon}(0)$ gegen Unendlich geht ist unwesentlich: durch Abänderung $f_{\varepsilon}(0) := 0$ hat man $f_{\varepsilon}(x) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die Integrale bleiben gleich. Wir stellen aber fest, dass

$$\sup_{\varepsilon>0} f_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2|x|} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Eine gemeinsame Majorante der f_{ε} kann also nicht integrierbar sein, vgl. Satz 5.3.

Eine für die Vertauschung hinreichende, zusätzliche Bedingung liefert der Satz über monotone Konvergenz, der bereits im vorigen Kapitel für den Nachweis der Linearität des Integrals benötigt wurde. Wir wiederholen den Satz hier unverändert.

Satz 4.5 (über monotone Konvergenz von B. Levi) Sei $f_k: X \to [0, \infty]$ eine Folge von μ -messbaren Funktionen mit $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ Definiere $f: X \to [0, \infty]$ durch $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Als Anwendung wollen wir kurz Maße besprechen, die durch Integration gegen eine Dichtefunktion gegeben sind.

Satz 5.1 (Maß mit Dichtefunktion) Sei μ äußeres Maß auf X und $\theta: X \to [0, \infty]$ sei μ -messbar. Definiere $\mu \sqcup \theta: 2^X \to [0, \infty]$ durch

$$\mu \sqcup \theta(E) = \inf \Big\{ \int_A \theta \, d\mu : A \ \mu\text{-messbar}, \ A \supset E \Big\}.$$

Dann ist $\mu \cup \theta$ ein äußeres Maß mit

(5.1)
$$\mu \sqcup \theta(E) = \int_{E} \theta \, d\mu \quad \text{für } E \text{ } \mu\text{-messbar},$$

und $\mu \cup \theta$ hat folgende weitere Eigenschaften:

- (1) Jede μ -messbare Menge ist auch $\mu \vdash \theta$ -messbar.
- (2) Aus $\mu(N) = 0$ folgt $\mu \cup \theta(N) = 0$.
- (3) $\int f d(\mu \cup \theta) = \int f \theta d\mu$ für μ -messbare $f: X \to [0, \infty]$.

BEWEIS: Sei $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Wähle μ -messbare $A_i \supset E_i$ mit $\int_{A_i} \theta \, d\mu < \mu \sqcup \theta(E_i) + 2^{-i} \varepsilon$. Dann ist $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mu$ -messbar mit $A \supset E$, und mit monotoner Konvergenz, Satz 4.5, folgt

$$\mu \llcorner \theta(E) \leq \int_A \theta \, d\mu = \int \theta \chi_A \, d\mu \leq \int \theta \sum_{i=1}^\infty \chi_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int \theta \chi_{A_i} \, d\mu \leq \sum_{i=1}^\infty \mu \llcorner \theta(E_i) + \varepsilon.$$

Außerdem gilt $\mu \vdash \theta(\emptyset) = \int \theta \chi_{\emptyset} d\mu = 0$, somit ist $\mu \vdash \theta$ ein äußeres Maß. Sind $A \supset E$ beide μ -messbar, so gilt nach Monotonie des Integrals, Satz 4.3,

$$\int_{A} \theta \, d\mu = \int \theta \chi_{A} \, d\mu \ge \int \theta \chi_{E} \, d\mu = \int_{E} \theta \, d\mu.$$

Darstellung (5.1) folgt. Wir zeigen jetzt, dass jede μ -messbare Menge E auch messbar bzgl. $\mu \sqcup \theta$ ist. Zu $S \subset X$ beliebig wähle $A \supset S$ μ -messbar mit $\int_A \theta \, d\mu < \mu \sqcup \theta(S) + \varepsilon$. Es gilt dann

$$\begin{split} \mu \llcorner \theta(S \cap E) + \mu \llcorner \theta(S \backslash E) & \leq & \mu \llcorner \theta(A \cap E) + \mu \llcorner \theta(A \backslash E) \\ & = & \int \theta \chi_{A \cap E} \, d\mu + \int \theta \chi_{A \backslash E} \, d\mu \\ & = & \int \theta \chi_{A} \, d\mu \\ & < & \mu \llcorner \theta(S) + \varepsilon. \end{split}$$

Damit ist Aussage (1) gezeigt, und (2) folgt direkt aus (5.1). Für μ -messbares E gilt nun

$$\int \chi_E d(\mu \llcorner \theta) = \mu \llcorner \theta(E) = \int \chi_E \theta d\mu.$$

Das zeigt (3) für $f \in \mathcal{T}^+(\mu)$. Ist $f \geq 0$ messbar bezüglich μ , so gibt es nach Satz 4.4 eine Folge $f_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $f_k \nearrow f$, und es folgt wieder mit monotoner Konvergenz

$$\int f d(\mu \sqcup \theta) = \lim_{k \to \infty} \int f_k d(\mu \sqcup \theta) = \lim_{k \to \infty} \int f_k \theta d\mu = \int f \theta d\mu.$$

Bemerkung 5.1 Für θ μ -integrierbar gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass gilt:

$$(5.2) \hspace{1cm} \mu(A) < \delta \text{ für } A \text{ μ-messbar} \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} (\mu \llcorner \theta)(A) < \varepsilon.$$

Dazu betrachten wir $\theta_k = \min(\theta, k) \nearrow \theta$, und schätzen wie folgt ab:

$$(\mu \sqcup \theta)(A) = \int_A \theta \, d\mu = \int_A (\theta - \theta_k) \, d\mu + \int_A \theta_k \, d\mu \le \int (\theta - \theta_k) \, d\mu + k\mu(A).$$

Nach Satz 4.5 gilt $\lim_{k\to\infty}\int\theta_k\,d\mu=\int\theta\,d\mu\in[0,\infty)$, also gibt es zu $\varepsilon>0$ ein $k\in\mathbb{N}$ mit

$$\int (\theta - \theta_k) d\mu = \int \theta d\mu - \int \theta_k d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle nun $\delta = \varepsilon/(2k)$, es ergibt sich $(\mu \cup \theta)(A) < \frac{\varepsilon}{2} + k\delta = \varepsilon$.

Das folgende Lemma ist von unabhängigem Interesse, zum Beispiel in der Variationsrechnung. Es besagt unter anderem, dass das Integral bezüglich punktweiser Konvergenz nichtnegativer Funktionen unterhalbstetig ist.

Satz 5.2 (Lemma von Fatou) Sei $f_k: X \to [0, \infty]$ eine Folge von μ -messbaren Funktionen. Für $f: X \to \overline{\mathbb{R}}, f(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x)$ gilt dann

$$\int f \, d\mu \le \liminf_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

BEWEIS: Für die Folge $g_k = \inf_{j \geq k} f_j$ gilt $g_{k+1} \geq g_k$ und $\lim_{k \to \infty} g_k = f$. Mit Satz 4.5 folgt, da andererseits $g_k \leq f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int g_k \, d\mu \le \liminf_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Satz 5.3 (Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue) Sei f_1, f_2, \ldots eine Folge von μ -messbaren Funktionen, und $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ für μ -fast-alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g: X \to [0, \infty]$ mit $\sup_k |f_k(x)| \leq g(x)$ für μ -fast-alle x. Dann ist f integrierbar bzgl. μ , und es gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Es gilt sogar $||f - f_k||_{L^1(\mu)} = \int |f - f_k| d\mu \to 0$, vgl. Definition 6.1.

Beweis: Die Folge $2g-|f-f_k|\geq 0$ konvergiert punktweise fast überall gegen 2g. Mit Satz 5.2 erhalten wir

$$\begin{split} \limsup_{k \to \infty} |\int f \, d\mu - \int f_k \, d\mu| & \leq \limsup_{k \to \infty} \int |f - f_k| \, d\mu \\ & = \int 2g \, d\mu - \liminf_{k \to \infty} \int (2g - |f - f_k|) \, d\mu \\ & \leq \int 2g \, d\mu - \int \liminf_{k \to \infty} (2g - |f - f_k|) \, d\mu \\ & = 0. \end{split}$$

Als erste Anwendung wollen wir das eindimensionale Riemannintegral mit dem Lebesgueintegral bzgl. des Maßes \mathcal{L}^1 vergleichen. Sei I=[a,b] ein kompaktes Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ beschränkt. Für eine durch Unterteilungspunkte $a=x_0\leq\ldots\leq x_N=b$ gegebene Zerlegung \mathcal{Z} von [a,b] in Teilintervalle $I_j=[x_{j-1},x_j]$ werden Ober- und Untersumme wie folgt gebildet:

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{N} (\sup_{I_j} f) (x_j - x_{j-1}) \quad \text{bzw.} \quad \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{N} (\inf_{I_j} f) (x_j - x_{j-1}).$$

Für zwei Zerlegungen \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 mit gemeinsamer Verfeinerung $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ sieht man leicht

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f).$$

44

f heißt Riemannintegrierbar mit Integral $\int_a^b f(x) dx = S$, wenn gilt:

$$\sup_{\mathcal{Z}} \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \inf_{\mathcal{Z}} \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = S.$$

Aus der Vorlesung Analysis I sind hinreichende Kriterien für die Riemannintegrierbarkeit bekannt, zum Beispiel Stetigkeit auf [a,b]. Es blieb dabei aber offen, ob die Riemannintegrierbarkeit äquivalent durch punktweise Eigenschaften charakterisiert werden kann; dies können wir nun beantworten. Ein positiver Nebeneffekt ist, dass wir so die Integrationsregeln aus Analysis I auch für das Lebesgueintegral zur Verfügung haben, jedenfalls wenn die Funktionen Riemannintegrierbar sind.

Satz 5.4 (Riemannintegrierbarkeit) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf dem kompakten Intervall I = [a, b]. Dann gilt:

$$f$$
 Riemannintegrierbar $\Leftrightarrow \mathcal{L}^1(\{x \in I : f \text{ ist nicht stetig in } x\}) = 0.$

In diesem Fall ist f auch Lebesgueintegrierbar, und die Integrale stimmen überein.

BEWEIS: Für eine Zerlegung \mathcal{Z} mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j], 1 \leq j \leq N$, definieren wir die Riemannschen Treppenfunktionen

$$\overline{f}_{\mathcal{Z}}(x) = \max_{I_j \ni x} \sup_{I_j} f \geq \limsup_{y \to x} f(y) \quad \text{ und } \quad \underline{f}_{\mathcal{Z}}(x) = \min_{I_j \ni x} \inf_{I_j} f \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

Sei $N_f(s) = \{x \in I : \limsup_{y \to x} f(y) - \liminf_{y \to x} f(y) \ge s\}$ für s > 0. Sind $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ beliebige Zerlegungen, so folgt $\overline{f}_{\mathcal{Z}_2}(x) - \underline{f}_{\mathcal{Z}_1}(x) \ge s$ für alle $x \in N_f(s)$, und hieraus mit Lemma 4.3

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) = \int_I \left(\overline{f}_{\mathcal{Z}_2} - \underline{f}_{\mathcal{Z}_1} \right) d\mathcal{L}^1 \ge s \, \mathcal{L}^1(N_f(s)).$$

Ist f Riemannintegrierbar, so bilden wir das Infimum über alle $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ und schließen $\mathcal{L}^1(N_f(s)) = 0$ für alle s > 0, womit die eine Richtung der Behauptung gezeigt ist.

Sei nun f \mathcal{L}^1 -fast-überall stetig, und \mathcal{Z}_i eine beliebige Folge von Zerlegungen mit Feinheit $\delta_i := \max_{1 \le j \le N_i} |x_{i,j} - x_{i,j-1}| \to 0$. Ist f stetig in x, so folgt

$$\overline{f}_{\mathcal{Z}_i}(x) \leq \sup_{|y-x| < \delta_i} f(y) \searrow f(x) \quad \text{ und } \quad \underline{f}_{\mathcal{Z}_i}(x) \geq \inf_{|y-x| \leq \delta_i} f(y) \nearrow f(x) \text{ mit } i \to \infty.$$

Also konvergieren $\overline{f}_{\mathcal{Z}_i}$, $\underline{f}_{\mathcal{Z}_i}$ punktweise \mathcal{L}^1 -fast-überall auf I gegen f, insbesondere ist f \mathcal{L}^1 -messbar nach Satz 4.1. Wegen $|\overline{f}_{\mathcal{Z}_i}|$, $|\underline{f}_{\mathcal{Z}_i}| \leq \sup_I |f| < \infty$ folgt aus Satz 5.3

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_i}(f) = \int_I \overline{f}_{\mathcal{Z}_i} d\mathcal{L}^1 \to \int_I f d\mathcal{L}^1 \quad \text{ und } \quad \underline{S}_{\mathcal{Z}_i}(f) = \int_I \underline{f}_{\mathcal{Z}_i} d\mathcal{L}^1 \to \int_I f d\mathcal{L}^1.$$

Also ist f Riemannintegrierbar mit Riemannintegral $\int_a^b f(x) dx = \int_I f d\mathcal{L}^1$.

Ein uneigentliches Riemannintegral kann dann und nur dann als Lebesgueintegral aufgefasst werden, wenn es absolut konvergiert. Dies zeigt man leicht mit Definition 4.4, Satz 5.4 und einem Konvergenzsatz. Zum Beispiel ist das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ nicht als Lebesgueintegral definiert, vergleiche auch Beispiel 4.3 und Beispiel 5.2 unten.

Wir kommen nun zu einer zweiten Anwendung des Satzes von Lebesgue, nämlich der Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Integralen, deren Integrand von einem Parameter abhängt.

Satz 5.5 (Stetigkeit von Parameterintegralen) Sei X ein metrischer Raum, μ ein Maß auf Y und $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in X$. Betrachte

$$F: X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y).$$

Es sei $f(\cdot,y)$ stetig in $x_0 \in X$ für μ -fast-alle $y \in Y$. Weiter gebe es eine μ -integrierbare Funktion $g: Y \to [0,\infty]$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$|f(x,y)| \leq g(y)$$
 für alle $y \in Y \setminus N_x$, mit einer μ -Nullmenge N_x .

Dann ist F stetiq in x_0 .

BEWEIS: Zu jeder Folge $x_k \to x_0$ gibt es nach Voraussetzung eine μ -Nullmenge N, so dass für alle $y \in Y \setminus N$ gilt:

$$f(x_k, y) \to f(x_0, y)$$
 und $|f(x_k, y)| \le g(y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz 5.3, folgt

$$F(x_0) = \int f(x_0, y) \, d\mu(y) = \lim_{k \to \infty} \int f(x_k, y) \, d\mu(y) = \lim_{k \to \infty} F(x_k).$$

Satz 5.6 (Differentiation unter dem Integralzeichen) Sei I offenes Intervall, μ ein Maß auf Y und $f: I \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in I$. Setze

$$F: I \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y).$$

Es sei $f(\cdot, y)$ in $x_0 \in I$ differenzierbar für μ -fast-alle $y \in Y$, und es gebe eine μ -integrierbare Funktion $g: Y \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$\frac{|f(x,y) - f(x_0,y)|}{|x - x_0|} \le g(y) \text{ für alle } y \in Y \backslash N_x,$$

mit einer geeigneten μ -Nullmenge N_x . Dann folgt

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) d\mu(y).$$

Beweis: Zu jeder Folge $x_k \to x_0$ gibt es nach Voraussetzung eine μ -Nullmenge $N \subset Y$, so dass für alle $y \in Y \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k, y) - f(x_0, y)}{x_k - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y),$$

$$\left| \frac{f(x_k, y) - f(x_0, y)}{x_k - x_0} \right| \le g(y).$$

Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz 5.3, folgt mit $k \to \infty$

$$\frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0} = \int \frac{f(x_k, y) - f(x_0, y)}{x_k - x_0} d\mu(y) \to \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) d\mu(y).$$

Wir wollen noch eine Version von Satz 5.6 formulieren, die etwas leichter zu handhaben ist.

Folgerung 5.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, μ ein Ma β auf Y und $f: U \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bezüglich μ für alle $x \in U$. Betrachte

$$F: U \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y).$$

Es gebe eine μ -Nullmenge $N \subset Y$, so dass für alle $y \in Y \setminus N$ gilt: $f(\cdot, y) \in C^1(U)$ und

$$|D_x f(x,y)| \le g(y)$$
 mit einer integrierbaren Funktion $g: Y \to [0,\infty]$.

Dann ist $F \in C^1(U)$ und es gilt für alle $x \in U$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \, d\mu(y).$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung gilt für alle $y \in Y$ mit Ausnahme der μ -Nullmenge N

$$\frac{|f(x+he_i,y)-f(x,y)|}{|h|} \le \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+the_i,y) \right| dt \le g(y).$$

Nach Satz 5.6 ist die Funktion F in jedem Punkt $x \in U$ nach x_i partiell differenzierbar, und die partielle Ableitung ist durch Differentiation unter dem Integralzeichen gegeben. Aber nach Satz 5.5 sind die partiellen Ableitungen stetig auf U, also ist $F \in C^1(U)$.

Beispiel 5.2 Als Beispiel berechnen wir das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Die Konvergenz ist dabei noch zu zeigen. Für t>0 betrachten wir zunächst die Integrale

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Die Funktion $f(t,x)=e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ hat für $t\geq\delta>0$ die Abschätzungen

$$|f(t,x)|, |\partial_t f(t,x)| \le e^{-\delta x} =: g(x)$$
 wobei $g \in L^1([0,\infty)).$

Insbesondere ist die Konvergenz der Integrale für t > 0 klar. Differentiation unter dem Integral, siehe Folgerung 5.1, und zweimalige partielle Integration ergibt für alle t > 0

$$F'(t) = \int_0^\infty e^{-tx}(-\sin x) dx$$

$$= \left[e^{-tx}\cos x\right]_{x=0}^{x=\infty} + t \int_0^\infty e^{-tx}\cos x dx$$

$$= -1 + t^2 \int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx$$

$$= -1 - t^2 F'(t).$$

Weiter gilt $\lim_{t \nearrow \infty} f(t, x) = 0$ für alle x > 0, mit integrierbarer Majorante e^{-x} . Aus Satz 5.3 folgt $\lim_{t \nearrow \infty} F(t) = 0$, und wir erhalten $F(t) = \pi/2 - \arctan t$ für alle t > 0.

Wir müssen jetzt den Grenzwert $t \searrow 0$ untersuchen, was etwas subtiler ist. Für $t \ge 0$ und $0 < r < R < \infty$ folgt mit $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$ durch partielle Integration

$$\int_{r}^{R} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \int_{r}^{R} e^{(i-t)x} \frac{dx}{x} = \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x} \right]_{x=r}^{x=R} + \operatorname{Im} \int_{r}^{R} \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)} \frac{dx}{x^{2}}.$$

Die rechte Seite konvergiert aber für $R \nearrow \infty$, also folgt für das uneigentliche Integral

$$\int_{r}^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = -\operatorname{Im} \frac{e^{(i-t)r}}{(i-t)r} + \operatorname{Im} \int_{r}^{\infty} \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)} \frac{dx}{x^{2}}.$$

Insbesondere sehen wir für t=0 die Existenz des Grenzwerts

$$F(0) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Außerdem bekommen wir für $t \ge 0$ wegen $|i - t| \ge 1$ die Abschätzung

$$\left| \int_{x}^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \le \frac{2}{r}.$$

Somit liefert Aufspaltung der Integrale auf (0,r) sowie (r,∞)

$$|F(0) - F(t)| \le \left| \int_0^r (1 - e^{-tx}) \frac{\sin x}{x} \, dx \right| + \frac{4}{r}.$$

Der Integrand konvergiert für $t \searrow 0$ punktweise gegen Null und ist gleichmäßig beschränkt, somit folgt $\limsup_{t\searrow 0} |F(0)-F(t)| \le 4/r$ nach Satz 5.3, und schließlich mit $r\nearrow\infty$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \lim_{t \searrow 0} F(t) = \lim_{t \searrow 0} \left(\pi/2 - \arctan t \right) = \pi/2.$$

6 Die L^p -Räume

Wir führen jetzt die L^p -Räume ein und zeigen, dass sie Banachräume sind. Dies ist eine wichtige Konsequenz der Konvergenzsätze. Als Anwendung beweisen wir die Konvergenz der Fourierreihe im Raum L^2 . Am Ende des Kapitels behandeln wir den Konvergenzsatz von Vitali, der genauer analysiert wie das Integral bei punktweiser Konvergenz springen kann.

Definition 6.1 (L^p-Norm und -Raum) Für μ -messbares $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ setzen wir

(6.1)
$$||f||_{L^{p}(\mu)} = \begin{cases} \left(\int |f|^{p} d\mu \right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf \left\{ s > 0 : \mu(\{|f| > s\}) = 0 \right\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Wir definieren den L^p -Raum als

(6.2)
$$L^{p}(\mu) = \{ f: X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ messbar}, \|f\|_{L^{p}(\mu)} < \infty \} / \sim,$$

mit der Äquivalenzrelation $f \sim g$ genau wenn f(x) = g(x) für μ -fast-alle $x \in X$.

Wir schreiben $\|\cdot\|_{L^p}$ statt $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$, wenn sich das Maß aus dem Kontext ergibt. Es ist üblich, die Elemente von $L^p(\mu)$ wieder als Funktionen zu bezeichnen, oft wird der Unterschied zwischen der Funktion und ihrer Äquivalenzklasse sogar ignoriert. Allerdings ist für $f \in L^p(\mu)$ ein Funktionswert f(x) nicht definiert falls $\mu(\{x\}) = 0$, denn ein Repräsentant von f kann in der Nullmenge $\{x\}$ beliebig abgeändert werden.

Lemma 6.1 Die Menge $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ μ-messbar}, \|f\|_{L^p} < \infty\}$ ist ein Untervektorraum der reellen Funktionen auf X.

Beweis: Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen λf und f + g messbar. Weiter gilt

(6.3)
$$\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \|f\|_{L^p} < \infty.$$

Für $p < \infty$ folgt das aus der Linearität des Integrals. Im Fall $p = \infty$ sei oBdA $\lambda > 0$, mit der Substitution $s = \lambda t$ ergibt sich

$$\|\lambda f\|_{L^{\infty}} = \inf\{s > 0 : \mu(\{|\lambda f| > s\}) = 0\} = \inf\{\lambda t > 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0\} = \lambda \|f\|_{L^{\infty}}.$$

Jetzt zur Addition. Für $p < \infty$ ist die Funktion $t \mapsto t^p$ konvex auf $[0, \infty)$, also gilt

$$|f+g|^p \le 2^p \left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \le 2^{p-1} \left(|f|^p + |g|^p\right).$$

Nach Satz 4.3 folgt $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Im Fall $p = \infty$ zeigen wir

$$(6.4) ||f + g||_{L^{\infty}} \le ||f||_{L^{\infty}} + ||g||_{L^{\infty}}.$$

Sei dazu $s > ||f||_{L^{\infty}}$ und $t > ||g||_{L^{\infty}}$. Es gilt $\{|f+g| > s+t\} \subset \{|f| > s\} \cup \{|g| > t\}$, also

$$\mu(\{|f+g| > s+t\} \le \mu(\{|f| > s\}) + \mu(\{|g| > t\}) = 0.$$

Es folgt $||f + g||_{L^{\infty}} \le s + t$ und damit die Abschätzung (6.4).

Proposition 6.1 Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^p(\mu)$ folgende Aussagen:

- (1) $||f||_{L^p} = 0 \Rightarrow f = 0.$
- (2) $f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^p(\mu) \text{ und } ||\lambda f||_{L^p} = |\lambda| ||f||_{L^p}.$
- (3) $f, g \in L^p(\mu) \implies f + g \in L^p(\mu) \text{ und } ||f + g||_{L^p} \le ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}.$

BEWEIS: Als erstes definieren wir die Vektorraumstruktur. Ist $||f||_{L^p} < \infty$, so hat die Menge $\{f = \pm \infty\}$ Maß Null nach Folgerung 4.3(1). Es gibt also eine äquivalente Funktion \tilde{f} mit Werten in \mathbb{R} . Wir setzen

(6.5)
$$[f] + [g] = [\tilde{f} + \tilde{g}] \quad \text{sowie} \quad \lambda[f] = [\lambda \tilde{f}].$$

Diese Operationen sind wohldefiniert, denn andere Wahlen von \tilde{f} und \tilde{g} unterscheiden sich nur auf einer Nullmenge. Die Äquivalenzklasse der Nullfunktion ist das neutrale Element $0 \in L^p(\mu)$. Der Check der Vektorraumaxiome sei den Lesern überlassen, wir geben aber folgende Interpretation: die Projektion auf die Äquivalenzklasse liefert eine Abbildung

$$P: \mathcal{L}^p(\mu) \to L^p(\mu), P(f) = [f].$$

P ist linear ist und, wie oben erklärt, auch surjektiv. Der Kern von P ist der Unterraum

$$\mathcal{N} = \{ f : X \to \mathbb{R} : f(x) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast-alle } x \in X \}.$$

Somit können wir $L^p(\mu)$ als Quotientenvektorraum $\mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$ interpretieren. Nun zu den Normeigenschaften. Aussage (1) ist trivial im Fall $p=\infty$, für $p<\infty$ verwende Folgerung 4.3(2) aus der Ungleichung von Tschebyscheff. Aussage (2) folgt aus (6.3), und Aussage (3) folgt für $p=\infty$ aus (6.4). Für $p<\infty$ wissen wir schon $f+g\in L^p(\mu)$, zu zeigen bleibt dann die Dreiecksungleichung. Dafür müssen wir etwas ausholen.

Lemma 6.2 (Youngsche Ungleichung) Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \ge 0$ gilt

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

BEWEIS: Sei $y \ge 0$ fest und $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy$. Dann gilt

$$f'(x) = x^{p-1} - y \begin{cases} < 0 & \text{für } x < y^{\frac{1}{p-1}} \\ > 0 & \text{für } x > y^{\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

Also gilt für alle $x \geq 0$

$$f(x) \ge f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^{\frac{p}{p-1}} - y^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

Satz 6.1 (Höldersche Ungleichung) Seien $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $fg \in L^1(\mu)$ und es gilt die Abschätzung

$$\int |fg| \, d\mu \le ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

BEWEIS: Wir können $||f||_{L^p} = ||g||_{L^q} = 1$ und $f, g \ge 0$ annehmen. Für $1 < p, q < \infty$ ist dann $0 \le fg \le \frac{1}{p}f^p + \frac{1}{q}g^q$, und durch Integration folgt

$$\int fg \, d\mu \le \int \left(\frac{1}{p} f^p + \frac{1}{q} g^q\right) \, d\mu = 1 = \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}.$$

Für $p=1, q=\infty$ integriere die Ungleichung $fg \leq f \|g\|_{L^{\infty}}$.

Im Fall p = q = 2 ergibt sich hier die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Wir zeigen nun die noch ausstehende Dreiecksungleichung in $L^p(\mu)$.

Satz 6.2 (Minkowski-Ungleichung) Für $f,g\in L^p(\mu)$ mit $1\leq p\leq \infty$ gilt

$$||f+g||_{L^p} \le ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}.$$

BEWEIS: Indem wir im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung anwenden, folgt

$$||f+g||_{L^{p}}^{p} = \int |f+g|^{p} d\mu$$

$$\leq \int |f| |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\leq ||f||_{L^{p}} ||f+g||_{L^{p}}^{p-1} + ||g||_{L^{p}} ||f+g||_{L^{p}}^{p-1}.$$

Kürzen liefert die Behauptung.

Jetzt nähern wir uns nun der wesentlichen Eigenschaft der L^p -Räume, und zwar der Vollständigkeit.

Lemma 6.3 Sei $1 \le p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum_{j=1}^\infty \|u_j\|_{L^p} < \infty$, so gelten folgende Aussagen:

- (1) Es gibt eine μ -Nullmenge N, so dass $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ existiert.
- (2) Mit f := 0 auf N gilt $f \in L^p(\mu)$.
- (3) $||f f_k||_{L^p} \to 0$.

Beweis: Wir betrachten die Funktionen

$$g_k = \sum_{j=1}^k |u_j|$$
 und $g = \sum_{j=1}^\infty |u_j|$.

Es gilt $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ und $g_k(x) \to g(x) \in [0, \infty]$ mit $k \to \infty$ für alle $x \in X$. Aus dem Satz über monotone Konvergenz, Satz 4.5, und der Minkowski-Ungleichung folgt

$$||g||_{L^p} = \lim_{k \to \infty} ||g_k||_{L^p} \le \sum_{j=1}^{\infty} ||u_j||_{L^p} < \infty.$$

Wegen Folgerung 4.3 ist $N := \{g = \infty\}$ eine μ -Nullmenge. Für $x \in X \setminus N$ ist die reelle Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ absolut konvergent, also ist $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} . Damit existiert der Grenzwert $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$, und es gilt weiter

$$|f_k|^p \le g^p \in L^1(\mu)$$
 sowie $|f - f_k|^p \le 2^{p-1} (|f|^p + |f_k|^p) \le 2^p g^p$.

Der Satz über dominierte Konvergenz, Satz 5.3, liefert $f \in L^p(\mu)$ und $||f - f_k||_{L^p} \to 0$.

Satz 6.3 (Riesz-Fischer) $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ ist vollständig, also ein Banachraum.

BEWEIS: Sei $f_k \in L^p(\mu)$ eine gegebene Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p}$. Es reicht aus, eine Teilfolge anzugeben, die in $L^p(\mu)$ konvergiert. Wir betrachten zuerst den Fall $1 \leq p < \infty$, und können nach evtl. Wahl einer Teilfolge annehmen:

$$||f_{k+1} - f_k||_{L^p} \le 2^{-k}$$
 für alle $k \in \mathbb{N}$.

Mit $f_0 := 0$ gilt $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ für $u_j = f_j - f_{j-1}$. Die Voraussetzungen von Lemma 6.3 sind erfüllt, also konvergiert f_k in $L^p(\mu)$ sowie punktweise μ -fast-überall gegen eine Funktion $f \in L^p(\mu)$. Dies beweist den Satz für $1 \le p < \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Wegen $|\|f_k\|_{L^{\infty}} - \|f_l\|_{L^{\infty}}| \leq \|f_k - f_l\|_{L^{\infty}}$ existiert $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^{\infty}}$. Die folgenden Mengen haben μ -Maß Null:

$$N_k = \{|f_k| > ||f_k||_{L^{\infty}}\}$$
 sowie $N_{k,l} = \{|f_k - f_l| > ||f_k - f_l||_{L^{\infty}}\}.$

Also ist $N=\bigcup_{k=1}^\infty N_k\cup\bigcup_{k,l=1}^\infty N_{k,l}$ ebenfalls eine Nullmenge. Für $x\in X\backslash N$ gilt nun

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le ||f_k - f_l||_{L^{\infty}} < \varepsilon$$
 für $k, l \ge k(\varepsilon)$,

insbesondere ist $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ definiert. Weiter haben wir für $x \in X \setminus N$

$$|f(x)| = \lim_{k \to \infty} |f_k(x)| \le \lim_{k \to \infty} ||f_k||_{L^{\infty}}, \text{ und}$$

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l \to \infty} |f_k(x) - f_l(x)| \le \varepsilon \text{ für } k \ge k(\varepsilon).$$

Dies bedeutet $||f||_{L^{\infty}} \leq \lim_{k \to \infty} ||f_k||_{L^{\infty}} < \infty$ und $||f_k - f||_{L^{\infty}} \to 0$ mit $k \to \infty$. Ein Teilergebnis des Beweises, das oft benutzt wird, ist die

Folgerung 6.1 Konvergiert f_k gegen f in $L^p(\mu)$, so konvergiert eine Teilfolge f_{k_j} punktweise μ -fast-überall gegen f.

Auf die Wahl der Teilfolge in Folgerung 6.1 kann für $p < \infty$ im allgemeinen nicht verzichtet werden. Betrachte dazu folgendes

Beispiel 6.1 Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $n = 2^k + j$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le j < 2^k$. Definiere damit eine Folge von Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \, 2^{-k} \le x \le (j+1)2^{-k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $\int_0^1 f_n(x) dx = 2^{-k} < 2/n \to 0$ mit $n \to \infty$. Andererseits gilt $\limsup_{n \to \infty} f_n(x) = 1$ für alle $x \in [0,1)$, denn zu $x \in [0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ können wir $j \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}$ wählen mit $j \cdot 2^{-k} \le x < (j+1) \cdot 2^{-k}$, also $f_n(x) = 1$ für $n = 2^k + j$. Also konvergiert die Folge nicht punktweise \mathcal{L}^1 -fast-überall gegen Null.

Oft werden die L^p -Räume auf einer μ -messbaren Teilmenge $E \subset X$ betrachtet. Einschränkung des Maßes μ auf 2^E ergibt ein äußeres Maß μ_E . Eine Menge $A \subset E$ ist genau dann messbar bezüglich μ_E , wenn sie als Teilmenge von X messbar bezüglich μ ist. Denn für $S \subset X$ gilt, da E messbar ist,

$$\mu(S) \ge \mu(S \cap E) + \mu(S \setminus E) \ge \mu(S \cap A) + \mu(S \cap E \setminus A) + \mu(S \setminus E) \ge \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Wir interessieren uns speziell für den Fall des n-dimensionalen Lebesguemaßes auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, der L^p -Raum bezüglich \mathcal{L}^n_Ω wird dann mit $L^p(\Omega)$ bezeichnet. Wir wollen zeigen, dass L^p -Funktionen im Fall $p < \infty$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger (siehe unten) approximiert werden können. Damit kann der Raum $L^p(\Omega)$ als Vervollständigung von $C_c^0(\Omega)$ interpretiert werden, in gewisser Analogie zu \mathbb{R} als Vervollständigung von \mathbb{Q} .

Definition 6.2 Der Träger einer Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $C_c^0(\Omega)$ bezeichnet.

Für $K \subset \Omega$ kompakt sei $\operatorname{dist}(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $\operatorname{dist}(x, K) = \inf_{z \in K} |x - z|$ die Abstandsfunktion von K. Wir brauchen die folgenden zwei Tatsachen:

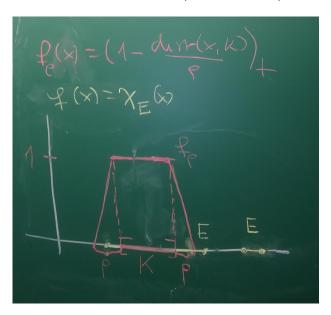
(6.6) $\operatorname{dist}(\cdot, K)$ ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins.

(6.7)
$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \backslash \Omega, K) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega} \operatorname{dist}(x, K) > 0.$$

Satz 6.4 (Dichtheit von $C_c^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^0(\Omega)$ mit $||f - f_k||_{L^p(\Omega)} \to 0$.

BEWEIS: Wir zeigen die Aussage zuerst für $f = \chi_E$, wobei $E \subset \Omega$ messbar ist mit $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Nach Satz 2.4(2) existiert $K \subset E$ kompakt mit $\mathcal{L}^n(E \setminus K) < \varepsilon/2$. Setze

$$f_{\varrho}: \Omega \to [0,1], f_{\varrho}(x) = \left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x,K)}{\varrho}\right)^{+}.$$



Nach (6.6), (6.7) ist $f_{\varrho} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{spt} f_{\varrho} = \{x : \operatorname{dist}(x, K) \leq \varrho\}$ kompakte Teilmenge von Ω für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Da $f_{\varrho} = f$ auf K, folgt

$$\begin{split} \int_{\Omega} |f_{\varrho} - f|^p \, d\mathcal{L}^n & \leq & 2^{p-1} \int_{\Omega \backslash K} (|f_{\varrho}|^p + |f|^p) \, d\mathcal{L}^n \\ & \leq & 2^{p-1} \Big(\mathcal{L}^n (\{0 < \operatorname{dist}(\cdot, K) \leq \varrho\}) + \mathcal{L}^n (E \backslash K) \Big) \\ & < & \varepsilon \quad \text{für } \varrho > 0 \text{ hinreichend klein.} \end{split}$$

Sei nun $f \in L^p(\Omega)$ beliebig. Wir können $f \geq 0$ annehmen, sonst betrachte f^+ und f^- . Nach Satz 4.4 gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ mit $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Mit Satz 5.3 folgt $f_k \to f$ in $L^p(\Omega)$, verwende dazu die Majorante

$$|f - f_k|^p \le 2^{p-1}(|f|^p + |f_k|^p) \le 2^p|f|^p \in L^1(\Omega).$$

Für die Treppenfunktionen f_k gilt nach Tschebyscheff

$$\mathcal{L}^{n}(\{f_{k} \geq s\}) \leq \frac{1}{s^{p}} \int_{\Omega} |f_{k}|^{p} d\mathcal{L}^{n} \leq \frac{1}{s^{p}} \int_{\Omega} |f|^{p} d\mathcal{L}^{n} < \infty.$$

Da f_k eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist, folgt die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 6.1 Der Raum $BC^0(\Omega)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω ist mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ ein Banachraum. Für $f \in BC^0(\Omega)$ gilt $\{|f| > s\} \neq \emptyset$ genau wenn $\mu(\{|f| > s\}) > 0$, das heißt

(6.8)
$$||f||_{L^{\infty}} = ||f||_{\sup}$$
 für alle $f \in BC^{0}(\Omega)$.

Angenommen $f \in L^{\infty}(\Omega)$ kann durch eine Folge $f_k \in BC^0(\Omega)$ bezüglich der L^{∞} -Norm approximiert werden. Wegen (6.8) ist dann f_k eine Cauchyfolge in $BC^0(\Omega)$. Da $BC^0(\Omega)$ vollständig ist, erhalten wir ein $\tilde{f} \in BC^0(\Omega)$ mit $\tilde{f} = f$ fast überall. Es gibt aber viele Funktionen in $L^{\infty}(\Omega)$, die keinen stetigen Repräsentanten haben, und damit nicht approximierbar sind.

Wir wollen nun die Bedeutung des L^2 -Raums für die Theorie der Fourierreihen erklären. In seiner Arbeit *Théorie analytique de la chaleur* (1822) hatte Joseph Fourier für Funktionen $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{C}$ eine Reihe eingeführt, die heute Fourierreihe von f heißt, und zwar

(6.9)
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{mit } \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx \in \mathbb{C}.$$

Die $\hat{f}(k)$ sind die komplexen Fourierkoeffizienten von f. Fourier hat dann folgendes Prinzip formuliert, ohne es zu beweisen oder weiter zu präzisieren:

Jede willkürliche Funktion f wird durch ihre Fourierreihe dargestellt.

Diese These hat eine Diskussion ausgelöst, was eigentlich eine willkürliche Funktion ist und was der Ausdruck Darstellung hier bedeutet, daran beteiligt waren unter anderem Dirichlet, Riemann und Cantor. Zunächst wurde die Aussage als punktweise Konvergenz der Reihe gegen f verstanden, diese konnte Dirichlet 1829 für hinreichend reguläre Funktionen beweisen. Aber 1876 fand Du Bois-Reymond ein Gegenbeispiel zur punktweisen Konvergenz, und zwar in Form einer stetigen Funktion. Das Konzept der L^2 -Konvergenz, damals Konvergenz im quadratischen Mittel, wurde zuerst von Axel Harnack formuliert und bewiesen: $\ddot{U}ber$ die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Funktionen, Mathematische Annalen 1880. Natürlich hatte er das Lebesgueintegral noch nicht zur Verfügung; jetzt können wir damit eine klare und allgemeine Fassung des Prinzips von Fourier geben.

Wir betrachten Funktionen $f \in L^2(I, \mathbb{C})$, das heißt Re f, Im f sind \mathcal{L}^1 -messbar und

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Nach Satz 6.3 ist $L^2(I,\mathbb{C})$ bezüglich der L^2 -Norm vollständig, also ein Hilbertraum mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx.$$

Die Funktionen $w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein Orthonormalsystem und spannen den Raum \mathbb{P} der trigonometrischen Polynome auf. Das n-te Fourierpolynom f_n ist definiert als

die Orthogonalprojektion von f auf den Raum \mathbb{P}_n der trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, w_k \rangle_{L^2} w_k = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Dabei sind $\hat{f}(k)$ die Fourierkoeffizienten von f, es gilt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, w_k \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Die Folge f_n heißt Fourierreihe von f. Wegen $f-f_n\perp_{L^2}\mathbb{P}_n$ gilt für alle $p\in\mathbb{P}_n$ die Gleichung

$$(6.10) ||f - p||_{L^2}^2 = ||(f - f_n) + (f_n - p)||_{L^2}^2 = ||f - f_n||_{L^2}^2 + ||f_n - p||_{L^2}^2.$$

Insbesondere folgt mit p=0 die Besselsche Ungleichung

(6.11)
$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = ||f_n||_{L^2}^2 \le ||f||_{L^2}^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Folge f_n ist damit eine L^2 -Cauchyfolge, denn für $m \geq n$ folgt

$$||f_m - f_n||_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n+1 \le |k| \le m} |\hat{f}(k)|^2 < \varepsilon$$
 für n hinreichend groß.

Nach Riesz-Fischer, Satz 6.3, konvergiert f_n damit in $L^2(I,\mathbb{C})$ gegen eine gewisse Funktion. Die entscheidende Frage ist nun: ist dieser Grenzwert die gegebene Funktion f?

Satz 6.5 (Harnack) Für $f \in L^2(I, \mathbb{C})$ konvergiert die Fourierreihe f_n gegen f in $L^2(I, \mathbb{C})$.

Beweis: Wegen (6.10) ist f_n die beste Approximation von f in \mathbb{P}_n , im Sinne dass

(6.12)
$$||f - f_n||_{L^2} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} ||f - p||_{L^2}.$$

Es reicht also zu zeigen, dass der Raum \mathbb{P} der trigonometrischen Polynome dicht in $L^2(I,\mathbb{C})$ ist. Nach Satz 6.4 ist $C_c^0(I,\mathbb{C})$ dicht in $L^2(I,\mathbb{C})$, und jede stetige Funktion kann gleichmäßig und damit auch in L^2 durch stückweise konstante Funktionen approximiert werden. Wir zeigen nun, dass für f stückweise konstant die Fourierreihe f_n gegen f in L^2 konvergiert. Dafür reicht wiederum $f_n \to f$ punktweise fast überall, denn f_n konvergiert in L^2 und nach Folgerung 6.1 muss der Grenzwert die Funktion f sein. Sei nun f mit Periode 2π auf \mathbb{R} fortgesetzt. Nach Definition von f_n gilt für $x_0 \in I$

$$f_n(x_0) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^n e^{-ik(x-x_0)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + \xi) \sum_{k=-n}^n e^{-ik\xi} d\xi.$$

Dabei wurde $x = x_0 + \xi$ substituiert und die Periodizität benutzt. Es folgt

$$f_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + \xi) - f(x_0)) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\xi} d\xi, \quad \text{da } \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\xi} d\xi = 2\pi.$$

Nun berechnen wir

$$\sum_{k=-n}^n e^{-ik\xi} = e^{-in\xi} \sum_{k=0}^{2n} e^{ik\xi} = e^{-in\xi} \, \frac{e^{i(2n+1)\xi}-1}{e^{i\xi}-1} = \frac{e^{i(n+1)\xi}-e^{-in\xi}}{e^{i\xi}-1}.$$

Danit erhalten wir die Formel

$$f_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{e^{i\xi} - 1} e^{i(n+1)\xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{e^{i\xi} - 1} e^{-in\xi} d\xi.$$

Auf der rechten Seite stehen die Fourierkoeffizienten $\hat{F}(-(n+1)) - \hat{F}(n)$ der Funktion

$$F(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{e^{i\xi} - 1}$$

Ist f stückweise konstant und x_0 keine Sprungstelle von f, so ist $f(x_0 + \xi) - f(x_0) = 0$ nahe bei $\xi = 0$, und damit ist F beschränkt. Aus der Besselschen Ungleichung für F folgt $\hat{F}(\pm n) \to 0$ mit $n \to \infty$, also $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Wir wollen eine alternative Formulierung des Satzes angeben. Sei $\ell^2(\mathbb{C})$ der Raum aller komplexen Folgen $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$||c||_{\ell^2}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

Der Raum $\ell^2(\mathbb{C})$ ist vollständig und damit ein Hilbertraum. Dies folgt aus Riesz-Fischer, angewandt für des Zählmaß auf \mathbb{Z} , oder durch ad hoc Beweis.

Folgerung 6.2 (Parseval) Die Abbildung

$$\mathcal{F}: (L^2(I,\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (\ell^2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\ell^2}), \quad \mathcal{F}(f) = (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}},$$

ist eine Isometrie von Hilberträumen.

Beweis: Aus Satz 6.5 folgt, wenn wir p = 0 in (6.10) setzen,

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{n \to \infty} ||f_n||_{L^2}^2 = \lim_{n \to \infty} \left(||f||_{L^2}^2 - ||f - f_n||_{L^2}^2 \right) = ||f||_{L^2}^2.$$

Also ist \mathcal{F} isometrisch, insbesondere injektiv. Für $c \in \ell^2(\mathbb{C})$ ist $f_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx}$ aber eine Cauchyfolge in $L^2(I,\mathbb{C})$ und konvergiert nach Riesz-Fischer gegen ein f in $L^2(I,\mathbb{C})$. Es folgt $\mathcal{F}(f) = c$, also ist \mathcal{F} auch surjektiv.

Die Konvergenz der Fourierreihe ist ein Spezialfall des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren. Dieser verallgemeinert die aus der Linearen Algebra bekannte Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen, und wird in verschiedenen Varianten in der Funktionalanalysis bewiesen. Der Operator ist hier $H = -\frac{d^2}{dx^2}$. Wir können H als Endomorphismus auf $C_{\text{per}}^{\infty}(I)$ auffassen, das sind die Funktionen mit glatter 2π -periodischer Fortsetzung:

$$H: C_{\text{per}}^{\infty}(I) \to C_{\text{per}}^{\infty}(I), Hf = -\frac{d^2f}{dx^2}.$$

Mit partieller Integration zeigt man $\langle Hf, g \rangle_{L^2} = \langle f, Hg \rangle_{L^2}$ für alle $f, g \in C^{\infty}_{per}(I)$, sowie $\langle Hf, f \rangle_{L^2} = \|\frac{df}{dx}\|_{L^2}^2 \geq 0$. Die w_k sind Eigenfunktionen von H zu den Eigenwerten $\lambda_k = k^2$:

$$Hw_k = k^2 w_k$$
 für $k \in \mathbb{Z}$.

Nach Satz 6.5 ist der von den Eigenfunktionen w_k aufgespannte Raum dicht in $L^2(I,\mathbb{C})$.

Zum Schluss des Kapitels kehren wir nochmal zu den allgemeinen Konvergenzsätzen zurück. Wir wollen das Verhältnis zwischen punktweiser Konvergenz und Konvergenz in $L^p(\mu)$ genauer analysieren.

Satz 6.6 (Egorov) Sei μ äußeres Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$, und f_k seien messbar mit $f_k \to f$ punktweise μ -fast-überall. Dann gibt es zu $\delta > 0$ eine messbare Menge A mit $\mu(X \setminus A) < \delta$, so dass $f_k|_A$ gleichmäßig gegen $f|_A$ konvergiert.

BEWEIS: Für $\varepsilon > 0$ bilden die Mengen $C_k^{\varepsilon} = \bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f - f_j| \ge \varepsilon\}$ eine absteigende Folge. Ist $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$, so gilt $x \notin C_k^{\varepsilon}$ für k hinreichend groß, also folgt mit der Stetigkeit des Maßes, Satz 1.4(ii),

$$\lim_{k\to\infty}\mu(C_k^\varepsilon)=\mu\Big(\bigcap_{k=1}^\infty C_k^\varepsilon\Big)=0.$$

Hier wurde die Bedingung $\mu(X) < \infty$ benutzt. Wähle nun eine Folge $\varepsilon_{\nu} \searrow 0$, und bestimme zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ ein $k_{\nu} \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_{k_{\nu}}^{\varepsilon_{\nu}}) < 2^{-\nu}\delta$, also

$$\mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_{k_{\nu}}^{\varepsilon_{\nu}}\Big) < \delta.$$

Mit $A := X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_{k_{\nu}}^{\varepsilon_{\nu}} \right)$ folgt $\sup_{x \in A} |f_{j}(x) - f(x)| \leq \varepsilon_{\nu}$ für alle $j \geq k_{\nu}$.

Satz 6.7 (Konvergenzsatz von Vitali) Seien $f_n \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, mit $f_n \to f$ punktweise fast überall. Dann sind folgende Aussagen (a) und (b) äquivalent:

- (a) $f \in L^p(\mu) \ und \|f_n f\|_{L^p} \to 0.$
- (b) Mit $\lambda(A) = \limsup_{n \to \infty} \int_A |f_n|^p d\mu$ gilt:
 - (1) $Zu \varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\lambda(A) < \varepsilon$ für alle A messbar mit $\mu(A) < \delta$.

(2) $Zu \varepsilon > 0$ gibt es E messbar mit $\mu(E) < \infty$ und $\lambda(X \setminus E) < \varepsilon$.

Im Fall p = 1 heißt eine Folge mit (1) und (2) gleichgradig integrierbar.

Beweis: Sei $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$. Für A messbar gilt

$$\left| \|f_n\|_{L^p(A)} - \|f\|_{L^p(A)} \right| \le \|f_n - f\|_{L^p(A)} \le \|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Also folgt $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_{L^p(A)} = ||f||_{L^p(A)}$, und somit

$$\lambda(A) = \int_{A} |f|^{p} d\mu.$$

Eigenschaft (1) gilt nun nach Bemerkung 5.1. Weiter ist mit Lemma 4.3

$$\mu(E_{\delta}) \le \frac{1}{\delta} \int |f|^p d\mu < \infty \quad \text{ für } E_{\delta} = \{|f|^p > \delta\}.$$

Nun gilt $\chi_{X\setminus E_\delta}|f|^p\leq \delta\searrow 0$ mit $\delta\searrow 0$, wobe
i $|f|^p$ integrierbare Majorante ist. Es folgt

$$\lambda(X \setminus E_{\delta}) = \int_{X \setminus E_{\delta}} |f|^p d\mu < \varepsilon$$
 für $\delta > 0$ hinreichend klein.

Seien jetzt umgekehrt (1) und (2) vorausgesetzt. Zu $\varepsilon > 0$ wähle E wie in (2) sowie $\delta > 0$ wie in (1). Da $\mu(E) < \infty$, gibt es nach Egorov $A \subset E$ messbar mit $\mu(E \setminus A) < \delta$, so dass $f_n \to f$ gleichmäßig auf A. Hier wenden wir Satz 6.6 auf das Maß $\mu_E = \mu|_{2^E}$ an, die Menge A ist dann μ_E -messbar, und damit auch μ -messbar (siehe p. 51). Nun haben wir die Abschätzung

$$|f_n - f|^p \le \chi_A |f_n - f|^p + (\chi_{X \setminus E} + \chi_{E \setminus A}) 2^{p-1} (|f|^p + |f_n|^p).$$

Aus dem Lemma von Fatou, Satz 5.2, folgt für B messbar

$$\int_{B} |f|^{p} d\mu \le \liminf_{n \to \infty} \int_{B} |f_{n}|^{p} d\mu \le \lambda(B).$$

Also erhalten wir mit $n \to \infty$ wegen (2) und (1)

$$\limsup_{n \to \infty} \int |f_n - f|^p d\mu \le 2^p \left(\lambda(X \setminus E) + \lambda(E \setminus A) \right) < 2^{p+1} \varepsilon.$$

Bedingung (1) im Satz von Vitali schließt eine Konzentration des Integrals aus, wie sie etwa bei der Diracfolge in Beispiel 5.1 auftritt. Bedingung (2) verhindert eine Konzentration bei Unendlich, wie sie zum Beispiel für die Folge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, stattfindet.

7 Der Satz von Fubini

Mit dem Cavalierischen Prinzip (1635) kann das Volumen von Körpern durch Zerlegung in parallele Schnitte berechnet werden. Allgemeiner können mit dem Satz von Fubini (1907) mehrdimensionale Integrale bzw. allgemeiner Integrale in Produkträumen auf Integrationen in den Faktoren reduziert werden. Gleichzeitig liefert der Satz eine optimale Aussage zur Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen bei iterierten Integralen.

Die Idee der Volumenberechnung durch Zerlegung in parallele Schnitte geht auf Archimedes (287-212 v. Chr.) zurück und ist als Prinzip von Cavalieri bekannt:

Haben zwei Körper in jeder Höhe Schnitte von gleichem Flächeninhalt, so haben sie auch das gleiche Volumen.

Man kann an einen Turm von Münzen denken, dessen Gesamtvolumen sich nicht ändert wenn diese irgendwie horizontal verschoben werden. Bevor wir in die Theorie einsteigen, bringen wir zwei elementare Beispiele, die auch für die Schule geeignet sind.

Beispiel 7.1 (Kegel-Volumen) Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ ein Kegel, zunächst mit Höhe H = 1. Durch Drehung und Verschiebung können wir annehmen, dass die Spitze von C im Nullpunkt liegt und die Basis in der Ebene z = 1, das heißt es gilt die Darstellung

$$C = \{s(b,1): b \in B, \ 0 \le s \le 1\} \quad \text{ mit } B \subset \mathbb{R}^2.$$

Für $h \in [0, 1]$ ist der h-Schnitt von C dann die Menge

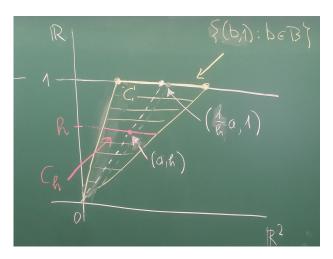
$$C_h = \{a \in \mathbb{R}^2 : (a, h) \in C\} = \{hb : b \in B\} = hB.$$

Ist A der Flächeninhalt von B, so hat C_h den Inhalt h^2A . Nach Cavalieri hängt das Volumen Vol(C) somit nur von A ab, wir schreiben Vol(C) = V(A). Es gilt V(kA) = kV(A) für $k \in \mathbb{N}$, betrachte dazu k disjunkte Gebiete B_1, \ldots, B_k mit Inhalt jeweils A. Daraus folgt für $k, m \in \mathbb{N}$

$$mV\left(\frac{k}{m}A\right) = kmV\left(\frac{1}{m}A\right) = kV(A),$$
 also $V\left(\frac{k}{m}A\right) = \frac{k}{m}V(A).$

Durch Approximation sehen wir $V(\lambda A) = \lambda V(A)$ für $\lambda \geq 0$. Wähle nun $B = [-1,1]^2$, dann ist C eine Pyramide über $[-1,1]^2$ mit Höhe h=1. Der Würfel $[-1,1]^3$ zerlegt sich in sechs solche Pyramiden. Das bedeutet V(4) = 8/6, also V(A) = A/4 V(4) = A/3. Sei schließlich C ein beliebiger Kegel mit Höhe H und Basisfläche A. Durch Streckung mit Faktor 1/H ergibt sich ein Kegel mit Höhe Eins und Basisfläche A/H^2 , also folgt allgemein

$$Vol(C) = H^3V(A/H^2) = H^3A/3H^2 = AH/3.$$

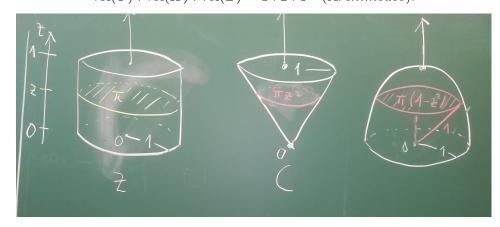


Beispiel 7.2 (Kugel-Volumen) Betrachte in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ folgende Mengen, sowie die Inhalte der zugehörigen z-Schnitte:

 $Z = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le 1, \ 0 \le z \le 1\}$ Zylinder:

 $C = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le z, \ 0 \le z \le 1\}$ $|C_z| = \pi z^2,$ $H = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{1 - z^2}, \ 0 \le z \le 1\}$ $|H_z| = \pi (1 - z^2).$ Kegel:

Es gilt $|Z_z| = |C_z| + |H_z|$, mit Cavalieri folgt $\operatorname{vol}(H) = \operatorname{vol}(Z) - \operatorname{vol}(C) = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$, oder vol(C) : vol(H) : vol(Z) = 1 : 2 : 3 (Archimedes).



Nun zur allgemeinen Theorie. Die Definition des Lebesguemaßes benutzte Überdeckungen mit Quadern, also Produkten von Intervallen. Die folgende Definition des Produktmaßes ist ähnlich, wobei wir uns auf zwei Faktoren beschränken.

Definition 7.1 (Produktmaß) Seien α, β äußere Maße auf X, Y. Das Produktmaß $\alpha \times \beta$ einer Menge $E \subset X \times Y$ ist

(7.1)
$$\alpha \times \beta(E) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j) \beta(B_j) : A_j, B_j \text{ messbar, } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \Big\}.$$

 $\alpha \times \beta$ ist ein äußeres Maß, das folgt wie beim Lebesguemaß, siehe Schritt 1 in Satz 3.2.

Lemma 7.1 (Produktmengen) Sei $P = A \times B$ eine Produktmenge, das heißt A, B sind messbar bezüglich α, β . Dann gilt $\alpha \times \beta(P) = \alpha(A)\beta(B)$, und P ist $\alpha \times \beta$ -messbar.

BEWEIS: Da A, B messbar, folgt $\alpha \times \beta(P) \leq \alpha(A)\beta(B)$ aus (7.1). Für die umgekehrte Ungleichung gehen wir analog zu Satz 3.1 vor. Der y-Schnitt von P ist

$$P_y = \{x \in X : (x, y) \in P\} = \begin{cases} A & \text{für } y \in B, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ mit $P_j = A_j \times B_j$, so folgt $P_y \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (P_j)_y$, und weiter mit Fatou

$$\alpha(A)\beta(B) = \int_Y \alpha(P_y) \, d\beta(y) \le \int_Y \sum_{j=1}^\infty \alpha((P_j)_y) \, d\beta(y) \le \sum_{j=1}^\infty \int_Y \alpha((P_j)_y) \, d\beta(y) = \sum_{j=1}^\infty \alpha(A_j)\beta(B_j).$$

Jetzt zur Messbarkeit. Sei $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ mit $P_j = A_j \times B_j$ wie in (7.1). Es gilt

$$(7.2) \quad P_j \cap P = (A_j \cap A) \times (B_j \cap B) \quad \text{ und } \quad P_j \backslash P = (A_j \cap A) \times (B_j \backslash B) \cup (A_j \backslash A) \times B_j.$$

Wir berechnen damit, wieder mit der Messbarkeit von A, B,

$$\alpha \times \beta(P_j \cap P) + \alpha \times \beta(P_j \setminus P) \leq \alpha(A_j \cap A)\beta(B_j \cap B) + \alpha(A_j \cap A)\beta(B_j \setminus B) + \alpha(A_j \setminus A)\beta(B_j)$$

$$= (\alpha(A_j \cap A) + \alpha(A_j \setminus A))\beta(B_j)$$

$$= \alpha(A_j)\beta(B_j).$$

Damit haben wir

$$\alpha \times \beta(E \cap P) + \alpha \times \beta(E \setminus P) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha \times \beta(P_j \cap P) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha \times \beta(P_j \setminus P) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j)\beta(B_j).$$

Nach (7.1) folgt wie gewünscht $\alpha \times \beta(E \cap P) + \alpha \times \beta(E \setminus P) \leq \alpha \times \beta(E)$.

Beim Beweis des Prinzips von Cavalieri brauchen wir die folgende Endlichkeitsbedingung, siehe auch Beispiel 7.3 im Anschluss.

Definition 7.2 (σ -endliche Menge) Sei μ ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $D \subset X$ heißt σ -endlich bzgl. μ , wenn es eine Ausschöpfung $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ gibt mit D_n μ -messbar (insbesondere D messbar) und $\mu(D_n) < \infty$.

Satz 7.1 (Cavalierisches Prinzip) Seien α, β äußere Maße auf X, Y. Die Menge $D \subset X \times Y$ sei σ -endlich bezüglich $\alpha \times \beta$. Dann ist $D_y = \{x \in X : (x,y) \in D\}$ α -messbar für β -fast-alle $y \in Y$, die Funktion $y \mapsto \alpha(D_y)$ ist β -messbar, und es gilt

$$\alpha \times \beta(D) = \int_{V} \alpha(D_y) \, d\beta(y).$$

Beweis: Sei zunächst D messbar bzgl. $\alpha \times \beta$ mit $(\alpha \times \beta)(D) < \infty$.

Schritt 1: Zu $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es eine Überdeckung $D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^{\nu} =: E^{\nu}$ mit paarweise disjunkten Produktmengen, so dass $E^1 \supset E^2 \supset \dots$ und

(7.3)
$$\alpha \times \beta(E) = \alpha \times \beta(D) \quad \text{für } E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^{\nu}.$$

Nach (7.1) und Lemma 7.1 gibt es jedenfalls eine Überdeckung P_i^{ν} , $i \in \mathbb{N}$, mit

$$\alpha \times \beta(E^{\nu}) \le \sum_{i=1}^{\infty} \alpha \times \beta(P_i^{\nu}) < \alpha \times \beta(D) + \frac{1}{\nu}.$$

Mit $\nu \to \infty$ folgt (7.3). Wir können induktiv P_i^{ν} , $i \in \mathbb{N}$, disjunkt annehmen, sonst zerlege $P_i^{\nu} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^{\nu}$ wie in (7.2). Weiter erreichen wir $E^{\nu} \subset E^{\nu-1}$, sonst gehe über zu der disjunkten Überdeckung $P_i^{\nu} \cap P_i^{\nu-1}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$. Auch das sind Produktmengen, siehe (7.2), und

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\alpha\times\beta(P_i^{\nu}\cap P_j^{\nu-1})=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha\times\beta\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}P_i^{\nu}\cap P_j^{\nu-1}\Big)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\alpha\times\beta(P_i^{\nu}).$$

Da D messbar mit $\alpha \times \beta(D) < \infty$, folgt nun

(7.4)
$$\alpha \times \beta(E \backslash D) = \alpha \times \beta(E) - \alpha \times \beta(D) = 0.$$

Schritt 2: Sei \mathcal{E} das System aller $\alpha \times \beta$ -messbaren Mengen $E \subset X \times Y$ mit

(7.5)
$$E_y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$
 ist α -messbar für alle $y \in Y$,

(7.6) die Funktion
$$f_E: Y \to [0, \infty], y \mapsto \alpha(E_y)$$
 ist β -messbar,

(7.7)
$$\gamma(E) := \int_{Y} f_{E} d\beta = \alpha \times \beta(E).$$

Wir behaupten $E \in \mathcal{E}$ mit E aus Schritt 1. Dazu stellen wir als erstes fest, dass Produktmengen $A \times B$ in \mathcal{E} sind. Denn es gilt $(A \times B)_y = A$, falls $y \in B$, und $(A \times B)_y = \emptyset$ sonst. Daraus folgt $A \times B \in \mathcal{E}$, und zwar genauer

$$f_{A\times B} = \alpha(A)\chi_B$$
 und $\gamma(A\times B) = \alpha(A)\beta(B) = \alpha\times\beta(A\times B)$.

Als nächstes betrachte $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ paarweise disjunkt mit $E_i \in \mathcal{E}$. Dann ist $E_y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_y$ α -messbar, $f_E = \sum_{i=1}^{\infty} f_{E_i}$ ist β -messbar, und aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\gamma(E) = \int_{Y} \sum_{i=1}^{\infty} f_{E_i} d\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Y} f_{E_i} d\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha \times \beta(E_i) = \alpha \times \beta(E).$$

Schließlich sei $E^1 \supset E^2 \supset \ldots$ mit $E^{\nu} \in \mathcal{E}$ und $\alpha \times \beta(E^1) < \infty$. Für $E = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E^{\nu}$ ist $E_y = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} (E^{\nu})_y$ α -messbar für alle $y \in Y$, und wegen $\int_Y f_{E^1} d\beta = \alpha \times \beta(E^1) < \infty$ gilt $\alpha((E^1)_y) = f_{E^1}(y) < \infty$ für β -fast-alle $y \in Y$. Aus Satz 1.4 folgt

$$f_E(y) = \alpha(E_y) = \lim_{\nu \to \infty} \alpha((E^{\nu})_y) = \lim_{\nu \to \infty} f_{E^{\nu}}(y)$$
 für β -fast-alle $y \in Y$.

Insbesondere ist f_E β -messbar, und wegen $f_{E^{\nu}} \leq f_{E^1}$ liefert der Satz von Lebesgue

$$\gamma(E) = \int_Y f_E \, d\beta = \lim_{\nu \to \infty} \int_Y f_{E^{\nu}} \, d\beta = \lim_{\nu \to \infty} \alpha \times \beta(E^{\nu}) = \alpha \times \beta(E).$$

Damit ist obige Behauptung gezeigt.

Schritt 3: Beweis des Satzes im Fall $\alpha \times \beta(D) < \infty$.

Sei $N \subset X \times Y$ eine $\alpha \times \beta$ -Nullmenge. Wir wenden die Schritte 1 und 2 auf N an (statt auf D), und erhalten ein $C \supset N$ mit $\alpha \times \beta(C) = 0$ und $C \in \mathcal{E}$, insbesondere

$$0 = \alpha \times \beta(C) = \int_{Y} \alpha(C_y) \, d\beta(y) \quad \Rightarrow \quad \alpha(N_y) \le \alpha(C_y) = 0 \text{ für } \beta\text{-fast-alle } y \in Y.$$

Wähle $N = E \setminus D$, dann folgt für β -fast-alle $y \in Y$: die Menge $D_y = E_y \setminus N_y$ ist α -messbar und es gilt $f_D(y) = f_E(y)$. Insbesondere ist f_D β -messbar und

$$\int_{Y} f_{D} d\beta = \int_{Y} f_{E} d\beta = \alpha \times \beta(E) = \alpha \times \beta(D).$$

Schritt 4: Beweis des Satzes im Fall D nur σ -endlich.

Sei $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ mit D_n messbar bzgl. $\alpha \times \beta$ und $\alpha \times \beta(D_n) < \infty$, sowie ohne Einschränkung $D_1 \subset D_2 \dots$ Dann ist $D_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n)_y$ messbar bezüglich α für β -fast-alle $y \in Y$, es gilt $f_{D_1} \leq f_{D_2} \leq \dots$ und

$$f_D(y) = \alpha(D_y) = \lim_{n \to \infty} \alpha((D_n)_y) = \lim_{n \to \infty} f_{D_n}(y).$$

Folglich ist f_D messbar bzgl. β und wegen monotoner Konvergenz

$$\int_{Y} f_{D} d\beta = \lim_{n \to \infty} \int_{Y} f_{D_{n}} d\beta = \lim_{n \to \infty} \alpha \times \beta(D_{n}) = \alpha \times \beta(D).$$

Der Satz ist bewiesen.

Natürlich können die Rollen von α und β im Satz vertauscht werden, das heißt man betrachtet das β -Maß der x-Schnitte $D_x = \{y \in Y : (x,y) \in D\}$ und integriert dieses bezüglich α . Die σ -Endlichkeit ist eine wesentliche Voraussetzung des Satzes, dazu folgendes Beispiel.

Beispiel 7.3 Für $D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = y\} \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{card}(D_x) d\mathcal{L}^1(x) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \mathcal{L}^1(D_y) d\operatorname{card}(y).$$

Mit $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ gilt $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \times I_k\right)$, also ist D messbar bezüglich $\mathcal{L}^1 \times \text{card}$. Aber D kann nicht σ -endlich sein bzgl. $\mathcal{L}^1 \times \text{card}$.

Wir kommen nun zu Anwendungen des Cavalierischen Prinzips. Dafür schreiben wir das Lebesguemaß \mathcal{L}^n als Produktmaß, was total naheliegend ist.

Lemma 7.2 Es gilt $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^m$ für n = k + m.

BEWEIS: Jeder Quader R im \mathbb{R}^n ist ein Produkt $R = P \times Q$ von Quadern im \mathbb{R}^k und \mathbb{R}^m , für die Volumina gilt |R| = |P| |Q|. Somit ist

$$\mathcal{L}^{n}(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |P_{j}| |Q_{j}| : P_{j}, Q_{j} \text{ Quader, } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{j} \times Q_{j} \right\} \ge \mathcal{L}^{k} \times \mathcal{L}^{m}(E).$$

Es reicht nun zu zeigen dass $\mathcal{L}^n(A \times B) \leq \mathcal{L}^k(A)\mathcal{L}^m(B)$ für Produktmengen $A \times B$, denn dann folgt für $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_j \times B_j) : A_j, B_j \text{ messbar}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \right\} \leq \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^m(E).$$

Betrachte erst den Fall $\mathcal{L}^k(A)$, $\mathcal{L}^m(B) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Quader P_i , Q_j mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ und $B \subset \sum_{j=1}^{\infty} Q_j$, sodass $\sum_{i=1}^{\infty} |P_i| < \mathcal{L}^k(A) + \varepsilon$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| < \mathcal{L}^m(B) + \varepsilon$. Es folgt $A \times B \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} P_i \times Q_j$, also

$$\mathcal{L}^{n}(A \times B) \leq \sum_{i,i=1}^{\infty} |P_{i}| |Q_{j}| < (\mathcal{L}^{k}(A) + \varepsilon) (\mathcal{L}^{m}(B) + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}^{k}(A) \mathcal{L}^{m}(B).$$

Für A, B beliebig setze $A_j = \{x \in A : |x| < j\}$ und $B_j = \{y \in B : |y| < j\}$. Dann folgt

$$\mathcal{L}^n(A \times B) = \lim_{j \to \infty} \mathcal{L}^n(A_j \times B_j) \le \lim_{j \to \infty} \mathcal{L}^k(A_j) \mathcal{L}^m(B_j) \le \mathcal{L}^k(A) \mathcal{L}^m(B).$$

Beispiel 7.4 Hier berechnen wir das Volumen α_n der Kugel $B = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\}$. Für $y \in (-1,1)$ ist $B_y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < (1-y^2)^{1/2}\}$, also folgt mit Lemma 7.2 und Satz 7.1

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}^{n-1}(B_y) \, dy = \alpha_{n-1} \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dy = \alpha_{n-1} \underbrace{\int_{0}^{\pi} \sin^n \vartheta \, d\vartheta}_{=:A_n}.$$

Durch partielle Integration folgt $A_n = \frac{n-1}{n}A_{n-2}$ für $n \ge 2$, wobei $A_0 = \pi$ und $A_1 = 2$, also

$$A_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \pi \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j} \quad \text{und} \quad A_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot A_1 = 2 \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}.$$

Also gilt $A_{2k+1}A_{2k} = \frac{2\pi}{2k+1}$ bzw. $A_{2k}A_{2k-1} = \frac{\pi}{k}$, und somit

$$\alpha_{2k} = (A_{2k}A_{2k-1}) \cdot \dots \cdot (A_2 A_1)\alpha_0 = \frac{\pi^k}{k!},$$

$$\alpha_{2k+1} = (A_{2k+1}A_{2k}) \cdot \dots \cdot (A_3 A_2)\alpha_1 = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}.$$

Beispiel 7.5 Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $K(A) = \{y(x,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : 0 < y < 1, x \in A\}$; dies ist der Kegel mit Spitze 0 über der Basis $A \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir behaupten: Ist A messbar bzgl. \mathcal{L}^n , so ist K(A) messbar bzgl. \mathcal{L}^{n+1} und es gilt

$$\mathcal{L}^{n+1}(K(A)) = \frac{1}{n+1} \mathcal{L}^n(A).$$

Betrachte dazu die Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$, für die K(A) eine Borelmenge im \mathbb{R}^{n+1} ist. Dieses System ist eine σ -Algebra, denn es gilt $K(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times (0,1)$ sowie

$$K\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(A_i) \quad \text{und} \quad K(\mathbb{R}^n \backslash A) = (\mathbb{R}^n \times (0,1)) \backslash K(A).$$

Weiter ist für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen auch $K(\Omega)$ offen in \mathbb{R}^{n+1} . Also ist für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ der Kegel K(B) eine Borelmenge, insbesondere \mathcal{L}^{n+1} -messbar, und aus Satz 7.1 folgt

$$\mathcal{L}^{n+1}(K(B)) = \int_0^1 \mathcal{L}^n(\{yx : x \in B\}) \, dy = \int_0^1 y^n \, \mathcal{L}^n(B) \, dy = \frac{1}{n+1} \, \mathcal{L}^n(B).$$

Ist nun $A \subset \mathbb{R}^n$ lediglich \mathcal{L}^n -messbar, so gibt es nach Satz 2.1 Borelmengen $B_{1,2} \subset \mathbb{R}^n$ mit $B_1 \subset A \subset B_2$ und $\mathcal{L}^n(B_2 \backslash B_1) = 0$. Es folgt $K(B_1) \subset K(A) \subset K(B_2)$ und $\mathcal{L}^{n+1}(K(B_2) \backslash K(B_1)) = \mathcal{L}^{n+1}(K(B_2 \backslash B_1)) = 0$. Also ist $K(A) \mathcal{L}^{n+1}$ -messbar und die Formel für das Volumen des Kegels gilt auch für A.

Definition 7.3 (σ -endliche Funktion) Eine Funktion $f: X \to [-\infty, \infty]$ heißt σ -endlich bezüglich des äußeren Maßes μ , wenn gilt: f ist μ -messbar und $\{f \neq 0\}$ ist σ -endlich.

Der folgende Satz über Integrale auf Produkträumen besitzt zahlreiche Anwendungen.

Satz 7.2 (Fubini) Seien α und β äußere Maße auf X bzw. Y, und $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sei σ -endlich bzgl. $\alpha \times \beta$. Ist das Integral $\int f d(\alpha \times \beta)$ definiert, so gilt:

- (1) für β -fast-alle $y \in Y$ ist $f(\cdot, y)$ α -messbar, und $\int_X f(x, y) d\alpha(x)$ existiert,
- (2) $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\alpha(x)$ ist β -messbar und $\int_Y \int_X f(x,y) \, d\alpha(x) \, d\beta(y)$ existiert,
- (3) $\int_{X\times Y} f d(\alpha \times \beta) = \int_{Y} \int_{X} f(x, y) d\alpha(x) d\beta(y).$

Der Satz gilt auch mit vertauschter Reihenfolge der Integrationen, also folgt

$$\int_{X\times Y} f \, d(\alpha\times\beta) = \int_{Y} \int_{Y} f(x,y) \, d\alpha(x) \, d\beta(y) = \int_{Y} \int_{Y} f(x,y) \, d\beta(y) \, d\alpha(x).$$

Zusatz: Ist $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ σ -endlich mit

$$\int_{Y} \int_{X} |f(x,y)| \, d\alpha(x) \, d\beta(y) < \infty,$$

so ist f integrierbar bezüglich $\alpha \times \beta$, und damit ist der Satz anwendbar.

Beweis: Für $f = \chi_E$ mit $E \subset X \times Y$ σ -endlich gelten (1)–(3) nach Satz 7.1:

- für β -fast-alle $y \in Y$ ist $f(\cdot, y) = \chi_{E_y}$ α -messbar, mit $\int_X f(x, y) d\alpha(x) = \alpha(E_y)$,
- $y \mapsto \alpha(E_y)$ ist β -messbar mit Integral $\int_V \alpha(E_y) d\beta(y)$,
- $\int_{X\times Y} f d(\alpha \times \beta) = (\alpha \times \beta)(E) = \int_{Y} \alpha(E_y) d\beta(y) = \int_{Y} \int_{X} f(x,y) d\alpha(x) d\beta(y).$

Als nächstes sei $f \geq 0$. Nach Satz 4.4 gibt es $\alpha \times \beta$ -Treppenfunktionen $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ mit $f_k(x,y) \nearrow f(x,y)$ auf $X \times Y$. Die f_k sind ebenfalls σ -endlich, und es gilt

- $f(\cdot, y)$ ist monotoner Limes der $f_k(\cdot, y)$. Für β -fast-alle $y \in Y$ ist damit $f(\cdot, y)$ α -messbar und $\int_X f(\cdot, y) d\alpha = \lim_{k \to \infty} \int_X f_k(\cdot, y) d\alpha$ mit Satz 4.5.
- Die Funktion $y \mapsto \int_X f(\cdot, y) d\alpha$ ist monotoner Limes von $y \mapsto \int_X f_k(\cdot, y) d\alpha$, für β -fastalle $y \in Y$. Damit ist $y \mapsto \int_X f(\cdot, y) d\alpha$ β -messbar, und $\int_Y \int_X f(x, y) d\alpha(x) d\beta(y) = \lim_{k \to \infty} \int_Y \int_X f_k(x, y) d\alpha(x) d\beta(y)$ wieder nach Satz 4.5.
- Es folgt, nochmal mit Satz 4.5 und der dritten Aussage oben im Fall χ_E ,

$$\int_{X\times Y} f \, d(\alpha \times \beta) = \lim_{k \to \infty} \int_{X\times Y} f_k \, d(\alpha \times \beta)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_Y \int_X f_k(x, y) \, d\alpha(x) d\beta(y)$$

$$= \int_Y \int_X f(x, y) \, d\alpha(x) d\beta(y).$$

Damit ist der Satz von Fubini im Fall $f \geq 0$ bewiesen. Sei f schließlich nur σ -endlich und zum Beispiel $\int f^- d(\alpha \times \beta) < \infty$. Dann sind f^{\pm} auch σ -endlich, und

$$\int_{Y} \int_{X} f^{-}(x, y) \, d\alpha(x) \, d\beta(y) = \int_{X \times Y} f^{-} \, d(\alpha \times \beta) < \infty.$$

Insbesondere folgt für β -fast-alle $y \in Y$

$$\int_X f^-(x,y) \, d\alpha(x) < \infty \quad \text{ und } \quad f^-(x,y) < \infty \text{ für } \alpha\text{-fast-alle } x \in X.$$

Wir schließen wieder in drei Schritten:

- Für β -fast-alle $y \in Y$ ist die Funktion $f(\cdot, y) = f^+(\cdot, y) f^-(\cdot, y)$ α -messbar, mit Integral $\int_X f(\cdot, y) d\alpha = \int_X f^+(\cdot, y) d\alpha \int_X f^-(\cdot, y) d\alpha$ (vgl. Satz 4.6 und nachfolgende Bemerkung).
- die Funktion $y \mapsto \int_X f(\cdot, y) d\alpha$ ist Differenz zweier messbarer Funktionen, also messbar. Ihr Integral existiert, denn wegen $s \mapsto s^-$ fallend gilt

$$\int_{Y} \left(\int_{X} f(x,y) \, d\alpha(x) \right)^{-} d\beta(y) \leq \int_{Y} \left(-\int_{X} f^{-}(x,y) \, d\alpha(x) \right)^{-} d\beta(y)$$

$$= \int_{Y} \int_{X} f^{-}(x,y) \, d\alpha(x) d\beta(y) < \infty.$$

• Schließlich folgt mit der Linearität des Integrals, siehe Satz 4.6,

$$\begin{split} \int_{X\times Y} f\,d(\alpha\times\beta) &= \int_{X\times Y} f^+\,d(\alpha\times\beta) - \int_{X\times Y} f^-\,d(\alpha\times\beta) \\ &= \int_Y \int_X f^+(x,y)\,d\alpha(x)d\beta(y) - \int_Y \int_X f^-(x,y)\,d\alpha(x)d\beta(y) \\ &= \int_Y \int_X (f^+(x,y) - f^-(x,y))\,d\alpha(x)d\beta(y) \\ &= \int_Y \int_X f(x,y)\,d\alpha(x)d\beta(y). \end{split}$$

Damit ist der Satz bewiesen. Der Zusatz folgt durch Anwendung auf |f|, danach gilt

$$\int_{X\times Y} |f| \, d(\alpha \times \beta) = \int_{Y} \int_{X} |f(x,y)| \, d\alpha(x) \, d\beta(y) < \infty,$$

das Integral von f bezüglich $\alpha \times \beta$ ist somit definiert.

Beispiel 7.6 Ein Beispiel, wo die iterierten Integrale existieren aber verschieden sind, ist

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \, dx = -\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy = \pi.$$

Beachte dabei, dass der Integrand gegeben ist durch $f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y}$ für $y \neq 0$. In diesem Fall folgt aus dem Satz von Fubini, dass das Integral bezüglich des Produktmaßes nicht existiert. Es kommt aber auch vor, dass die iterierten Integrale gleich sind, und dennoch das Integral bezüglich des Produktmaßes nicht definiert ist:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \, dx = 0,$$

aber das \mathcal{L}^2 -Integral über $[-1,1]^2$ existiert nicht wegen

$$\int_{[0,1]^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} d\mathcal{L}^2(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = \infty.$$

Beispiel 7.7 Sei μ ein äußeres Maß auf X und $f: X \to [0, \infty]$ sei σ -endlich bezüglich μ . Ist die Funktion $\varphi: [0, \infty] \to [0, \infty]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$, sowie auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar mit $\varphi'(t) \ge 0$, so gilt

$$\int_X \varphi(f(x)) \, d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(t) \, \mu\big(\{f > t\}\big) \, dt.$$

Betrachte dazu den Subgraph $E = \{(x,t) \in X \times [0,\infty) : t < f(x)\}$. Die Funktionen $(x,t) \mapsto t$, $(x,t) \mapsto f(x)$ und $(x,t) \mapsto \varphi'(t)$ sind $\mu \times \mathcal{L}^1$ -messbar. Folglich ist auch E messbar bezüglich

 $\mu \times \mathcal{L}^1$, und die Funktion $(x,t) \mapsto \varphi'(t)\chi_E(x,t)$ ist σ -endlich bezüglich $\mu \times \mathcal{L}^1$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{X} \varphi(f(x)) d\mu(x) = \int_{X} \int_{0}^{\infty} \varphi'(t) \chi_{E}(x, t) dt d\mu(x)$$

$$= \int_{E} \varphi'(t) d(\mu \times \mathcal{L}^{1})(x, t)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \int_{X} \varphi'(t) \chi_{E}(x, t) d\mu(x) dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} \varphi'(t) \mu(\{f > t\}) dt.$$

Für $\varphi(t)=t^p$ mit p>0 und $f:X\to\mathbb{R}$ σ -endlich folgt zum Beispiel

$$\int_{X} |f|^{p} d\mu = \int_{0}^{\infty} p t^{p-1} \mu(\{|f| > t\}) dt.$$

Folgende Integrationsregel ist eine wichtige Anwendung des Satzes von Fubini.

Satz 7.3 (Partielle Integration) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C_c^1(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} (\partial_j f) g \, dx = - \int_{\Omega} f(\partial_j g) \, dx \quad \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Beweis: Es reicht, die folgende Aussage zu beweisen:

(7.8)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f \, dx = 0 \quad \text{ für alle } f \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$$

Denn setzen wir fg durch Null zu einer Funktion $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ fort, so folgt

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \phi \, dx = \int_{\Omega} \partial_j (fg) \, dx = \int_{\Omega} (\partial_j f) g \, dx + \int_{\Omega} f(\partial_j g) \, dx,$$

womit der Satz bewiesen ist. Nun liefert Fubini für $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ mit $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j f(x', x_n) \, dx' dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_j f(x', x_n) \, dx_n dx'.$$

Für j=n ist das rechte Integral Null nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und für $1 \le j \le n-1$ verschwindet das mittlere Integral per Induktion.

Die Regel wird oft mit den Operatoren Gradient und Divergenz formuliert, und zwar gilt für $f \in C_c^1(\Omega)$ und $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{grad} f, X \rangle \, dx = -\int_{\Omega} f(\operatorname{div} X) \, dx.$$

Dies folgt sofort wegen $\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f) X_i$ und $f(\operatorname{div} X) = \sum_{i=1}^{n} f(\partial_i X_i)$.

Der Satz von Fubini gilt auch für kartesische Produkte mit endlich vielen (statt nur zwei) Faktoren. Man zeigt analog zu Lemma 7.2, dass in einem endlichen Produkt von Maßen beliebig Klammern gesetzt oder weggelassen werden können. Der Satz von Fubini wird dann mittels Induktion über die Zahl der Faktoren bewiesen, wobei die Reihenfolge der Integrationen bezüglich der einzelnen Variablen beliebig gewählt werden kann.

8 Der Transformationssatz

Neben dem Satz von Fubini ist die Transformation auf geeignete Koordinaten das zweite wichtige Hilfsmittel zur Berechnung von Maßen beziehungsweise Integralen im \mathbb{R}^n . Nach einigen Beispielen behandeln wir in einem Exkurs die Umrechnung der Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Laplace auf beliebige krummlinige Koordinaten. Diese Formeln kommen bei diversen Problemen in Geometrie und Physik zur Anwendung.

Wir beginnen mit der Frage der Messbarkeit von Bildmengen. Es ist dabei praktisch die Maximumsnorm $||x|| = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$ zu verwenden, bekanntlich ist $||x|| \le |x| \le \sqrt{n} ||x||$.

Lemma 8.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, mit Konstante Λ bzgl. der Maximumsnorm $\|\cdot\|$. Dann gilt

$$\mathcal{L}^n(f(E)) \leq \Lambda^n \mathcal{L}^n(E)$$
 für alle $E \subset U$.

BEWEIS: Wir können $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ annehmen. Sei $Q(x_0, \varrho)$ der abgeschlossene, achsenparallele Würfel mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Kantenlänge $2\rho > 0$, also

$$Q(x_0, \varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| \le \varrho\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $||f(x) - f(x_0)|| \le \Lambda ||x - x_0||$ für $x, x_0 \in U$, also

$$Q = Q(x_0, \varrho) \subset U \quad \Rightarrow \quad f(Q) \subset Q(f(x_0), \Lambda \varrho).$$

Nach Satz 2.4 gibt es nun $V \supset E$ offen mit $\mathcal{L}^n(V) < \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon$, oBdA $V \subset U$, und weiter eine Ausschöpfung $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ durch Würfel Q_j mit paarweise disjunktem Inneren, siehe Lemma 3.2. Damit folgt

$$\mathcal{L}^n(f(E)) \le \mathcal{L}^n(f(V)) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(f(Q_j)) \le \Lambda^n \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_j) \le \Lambda^n(\mathcal{L}^n(E) + \varepsilon).$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Satz 8.1 (\mathcal{L}^n -Messbarkeit von Bildmengen) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetiq, zum Beispiel $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so qilt:

- (i) $N \subset U$ Nullmenge \Rightarrow f(N) Nullmenge.
- (ii) $E \subset U \mathcal{L}^n$ -messbar \Rightarrow $f(E) \mathcal{L}^n$ -messbar.

BEWEIS: f ist auf kompakten Teilmengen von U Lipschitzstetig, deshalb folgt Aussage (i) direkt aus Lemma 8.1. Für (ii) können wir E beschränkt voraussetzen, andernfalls betrachte $E_j = \{x \in E : |x| \leq j\}$. Nach Folgerung 2.1 gilt nun $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup N$ mit K_j kompakt und $\mathcal{L}^n(N) = 0$. Da $f(K_j)$ kompakt und $\mathcal{L}^n(f(N)) = 0$, ist f(E) \mathcal{L}^n -messbar.

Definition 8.1 (Diffeomorphismus) Eine Abbildung $\phi : U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt C^1 -Diffeomorphismus, wenn ϕ bijektiv ist und ϕ, ϕ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Beispiel 8.1 (Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2) Betrachte die glatte Abbildung

$$\phi: (0, \infty) \times (0, 2\pi) = U \to V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \ge 0\}, \ \phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Die Umkehrabbildung von ϕ lautet mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\phi^{-1}(x,y) = \begin{cases} (r, \arccos\frac{x}{r}) & \text{falls } y \ge 0, \\ (r, 2\pi - \arccos\frac{x}{r}) & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Für x < 0 gilt alternativ $\phi^{-1}(x, y) = (r, \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{r})$, insbesondere ist ϕ^{-1} glatt auf ganz V.

Unser Beweis des Transformationssatzes stützt sich auf folgende infinitesimale Fassung.

Lemma 8.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $D\phi(x_0) \in Gl_n(\mathbb{R})$. Gegeben sei eine Folge $Q_j = Q(x_j, \varrho_j) \subset U$ mit $\varrho_j \to 0$ und $x_0 \in Q_j$ für alle j. Dann gilt

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(\phi(Q_j))}{|Q_j|} \le |\det D\phi(x_0)|.$$

BEWEIS: Wir können nach geeigneten Translationen $x_0 = 0$ und $\phi(x_0) = 0$ annehmen, außerdem sei zunächst $D\phi(0) = \mathrm{Id}$. Nach Definition der Differenzierbarkeit gilt dann

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - (\phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0))}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - x}{\|x\|}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $x \in Q_j$ gilt $||x|| \le ||x - x_j|| + ||x_j - 0|| \le 2\varrho_j$, also folgt

$$\|\phi(x) - x\| \le \varepsilon \|x\| \le 2\varepsilon \varrho_j$$
 für j hinreichend groß.

Dies impliziert die Abschätzung

$$\|\phi(x) - \phi(x_i)\| \le \|\phi(x) - x\| + \|x - x_i\| + \|x_i - \phi(x_i)\| \le (1 + 4\varepsilon)\varrho_i$$

und damit weiter

$$\frac{\mathcal{L}^n(\phi(Q_j))}{|Q_j|} \le (1 + 4\varepsilon)^n.$$

Mit $j \to \infty$ und $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung des Lemmas im Fall $D\phi(0) = \text{Id}$. Für $D\phi(0)$ beliebig sei $\phi_0 = D\phi(0)^{-1} \circ \phi$, also $D\phi_0(0) = \text{Id}$ und $\phi = D\phi(0) \circ \phi_0$. Mit Satz 3.5 folgt

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(\phi(Q_j))}{|Q_j|} = \limsup_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(D\phi(0)(\phi_0(Q_j)))}{|Q_j|}$$

$$= |\det D\phi(0)| \limsup_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(\phi_0(Q_j))}{|Q_j|}$$

$$\leq |\det D\phi(0)|.$$

Es ist praktisch, in der Transformationsformel statt $d\mathcal{L}^n$ die klassischen Bezeichungen dx bzw. dy zu verwenden, um zwischen Bild und Urbild zu unterscheiden.

Satz 8.2 (Transformationsformel) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ ein C^1 Diffeomorphismus. Ist $A \subset U$ \mathcal{L}^n -messbar, so ist auch $\phi(A)$ \mathcal{L}^n -messbar und es gilt

(8.1)
$$\mathcal{L}^{n}(\phi(A)) = \int_{A} |\det D\phi(x)| \, dx.$$

Weiter gilt für jede \mathcal{L}^n -messbare Funktion $f: V \to \overline{\mathbb{R}}$

(8.2)
$$\int_{V} f(y) dy = \int_{U} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| dx,$$

falls eines der Integrale definiert ist.

BEWEIS: Wir betrachten auf U die äußeren Maße $\lambda = \mathcal{L}^n \mid \det D\phi \mid$ und $\mu = \phi^{-1}(\mathcal{L}^n)$. Nach Satz 5.1 und Satz 1.1 gelten für $A \subset U$ Lebesgue-messbar folgende Aussagen:

- (a) A ist λ -messbar und $\lambda(A) = \int_A |\det D\phi| d\mathcal{L}^n$;
- (b) A ist μ -messbar und $\mu(A) = \mathcal{L}^n(\phi(A))$;
- (c) Aus $\mathcal{L}^n(A) = 0$ folgt $\lambda(A) = \mu(A) = 0$.

In (b) bzw. (c) wird benutzt dass $\phi(A)$ \mathcal{L}^n -messbar ist mit $\mathcal{L}^n(\phi(A)) = 0$ wenn $\mathcal{L}^n(A) = 0$, beides gilt nach Satz 8.1. Wir zeigen nun $\lambda(A) \geq \mu(A)$ für alle \mathcal{L}^n -messbaren $A \subset U$. Dabei können wir $\lambda(U) < \infty$ und $\mu(U) < \infty$ voraussetzen, andernfalls schöpfe U durch offene, relativ kompakte Mengen aus. Nach Folgerung 2.1 gilt $A = E \setminus N$, wobei $\mathcal{L}^n(N) = 0$ und $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ mit offenen $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ Wegen Satz 1.4(ii) (hier brauchen wir $\lambda(U), \mu(U) < \infty$) reicht es daher aus, die Ungleichung auf allen offenen Mengen nachzuweisen. Aber nach Lemma 3.2 ist jede offene Menge eine abzählbare Vereinigung von kompakten, achsenparallelen Würfeln in U mit paarweise disjunktem Inneren, die Schnitte der Würfel sind Nullmengen bezüglich λ und μ . Es bleibt zu zeigen:

(8.3)
$$\lambda(Q_0) \ge \mu(Q_0)$$
 für alle solche Würfel $Q_0 \subset U$.

Angenommen es ist $\lambda(Q_0) < \mu(Q_0)$ für ein Q_0 . Wähle dann ein $\theta \in [0,1)$ mit $\lambda(Q_0) < \theta \mu(Q_0)$, und zerlege Q_0 durch Halbierung der Kanten in 2^n kompakte Teilwürfel $Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,2^n}$. Wäre $\lambda(Q_{0,i}) \geq \theta \mu(Q_{0,i})$ für alle i, so folgt durch Summation

$$\lambda(Q_0) = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda(Q_{0,i}) \ge \theta \sum_{i=1}^{2^n} \mu(Q_{0,i}) = \theta \mu(Q_0),$$

ein Widerspruch. Es gibt also einen Teilwürfel $Q_{0,i} =: Q_1$ mit $\lambda(Q_1) < \theta \mu(Q_1)$. Iteration liefert eine Schachtelung $Q_0 \supset Q_1 \supset \dots$ so dass

(8.4)
$$\lambda(Q_j) < \theta \mu(Q_j) \quad \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j = \{x_0\}$ mit einem $x_0 \in U$. Aus (8.4) und Lemma 8.2 folgt

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\lambda(Q_j)}{|Q_j|} \le \limsup_{j \to \infty} \frac{\lambda(Q_j)}{\mu(Q_j)} \limsup_{j \to \infty} \frac{\mu(Q_j)}{|Q_j|} \le \theta |\det D\phi(x_0)|.$$

Aber $|\det D\phi|$ ist stetig in x_0 , also gilt mit $j \to \infty$

$$\left|\frac{\lambda(Q_j)}{|Q_j|} - |\det D\phi(x_0)|\right| = \frac{1}{|Q_j|} \left| \int_{Q_j} \left(|\det D\phi(x)| - |\det D\phi(x_0)| \right) dx \right| \to 0.$$

Wegen $\theta < 1$ und det $D\phi(x_0) \neq 0$ ist das ein Widerspruch. Dies zeigt (8.3) und damit die Ungleichung $\lambda \geq \mu$. Als nächstes betrachte $f: V \to \overline{\mathbb{R}}$. Es gilt $\{f \circ \phi < s\} = \phi^{-1}(\{f < s\})$, nach Satz 8.1 ist mit f auch $f \circ \phi$ messbar bezüglich \mathcal{L}^n und umgekehrt. Es folgt weiter für \mathcal{L}^n -messbares $f: V \to [0, \infty]$

(8.5)
$$\int_{U} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| dx \ge \int_{V} f(y) dy.$$

Und zwar ergibt sich (8.5) erst für $f = \chi_B$, indem wir in der Ungleichung $\lambda(A) \geq \mu(A)$ die Menge $A = \phi^{-1}(B)$ einsetzen, dann für nichtnegative \mathcal{L}^n -Treppenfunktionen und schließlich für $f \geq 0$ messbar durch Approximation von unten nach Satz 4.4. Um schließlich für $f \geq 0$ die Gleichheit in (8.2) zu zeigen, wenden wir (8.5) auf $\psi : V \to U$ statt ϕ und auf $g = f \circ \phi |\det D\phi|$ an. Dies liefert wegen $1 = \det D(\phi \circ \psi)(y) = (\det D\phi)(\psi(y)) \det D\psi(y)$

$$\int_{V} f(y) \, dy = \int_{V} g\big(\psi(y)\big) |\det D\psi(y)| \, dy \geq \int_{U} g(x) \, dx = \int_{U} f\big(\phi(x)\big) |\det D\phi(x)| \, dx.$$

Damit ist (8.2) für $f \ge 0$ bewiesen, Gleichung (8.1) folgt daraus mit $f = \chi_{\phi(A)}$. Für beliebige f zerlegen wir schließlich $f = f^+ - f^-$.

Beispiel 8.2 (Gauß-Integral) Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ folgt mit Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy \right) \, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right)^2.$$

Für Polarkoordinaten $\phi:(0,\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$ gilt det $D\phi(r,\theta)=r$. Da $\{(x,0):x\geq 0\}$ eine \mathcal{L}^2 -Nullmenge ist, folgt aus dem Transformationssatz, und anschließend dem Satz von Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = \int_{(0,\infty) \times (0,2\pi)} e^{-r^2} r \, d\mathcal{L}^2(r,\theta) = \int_0^\infty e^{-r^2} r \, \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \, dr = \pi.$$

Also gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Beispiel 8.3 (Lineare Transformationsformel) Betrachte den Spezialfall von Satz 8.2, dass der Diffeomorphismus $\phi: U \to V$ Einschränkung einer linearen Abbildung ist, das heißt $\phi(x) = Sx$ mit $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $D\phi(x) = S$ für alle $x \in U$, und die Formeln aus dem Transformationssatz lauten, vgl. auch Satz 3.5,

$$\mathcal{L}^n(S(D)) = |\det S| \, \mathcal{L}^n(D) \quad \text{bzw.} \quad \int_V f(y) \, d\mathcal{L}^n(y) = |\det S| \, \int_U f(Sx) \, d\mathcal{L}^n(x).$$

Beispiel 8.4 (Polarkoordinaten im \mathbb{R}^3) Betrachte im \mathbb{R}^3 Polarkoordinaten

$$\phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

Die Abbildung ϕ ist ein C^{∞} -Diffeomorphismus der offenen Mengen $U=(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$ und $V=\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,z):x\geq 0\}$. Die Inverse lautet explizit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \ \theta = \arccos\frac{z}{r}, \ \varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y \ge 0\\ 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y \le 0. \end{cases}$$

Die Jacobimatrix von ϕ ist

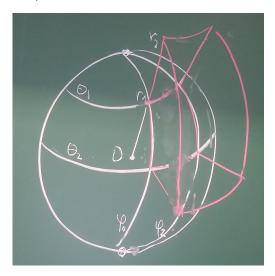
$$D\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & r\cos\theta \cos\varphi & -r\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & r\cos\theta \sin\varphi & r\sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen, zum Beispiel durch Entwicklung nach der dritten Zeile,

$$\det D\phi = r^2 \sin \theta.$$

Mit der Transformationsformel und Fubini gilt für $E = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$

$$\mathcal{L}^{3}(\phi(E)) = \int_{r_{1}}^{r_{2}} \int_{\theta_{1}}^{\theta_{2}} \int_{\varphi_{1}}^{\varphi_{2}} r^{2} \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \frac{r_{2}^{3} - r_{1}^{3}}{3} (\cos \theta_{1} - \cos \theta_{2})(\varphi_{2} - \varphi_{1}).$$



Im restlichen Teil des Kapitels machen wir einen Ausflug in die Riemannsche Geometrie, und zwar diskutieren wir die Riemannschen Versionen der Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Laplace. Als Anwendung leiten wir Formeln her, die die üblichen Euklidischen Operatoren in krummlinigen Koordinaten ausdrücken. Diese sind in Geometrie, Analysis und Physik relevant.

Definition 8.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $g \in C^0(U, \mathbb{R}^{n \times n})$ heißt Riemannsche Metrik (der Klasse C^0), wenn die Matrix $g(x) = (g_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ist für alle $x \in U$.

Es ist in diesem Kontext üblich, die Komponenten von Linearformen bzw. Bilinearformen mit unteren Indizes zu schreiben, dagegen die Komponenten von Vektoren mit oberen Indizes. Jede Matrixfunktion $g: U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ induziert eine ortsabhängige Bilinearform, die üblicherweise auch mit g(x) bezeichnet wird:

$$g(x)(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)v^{i}w^{j} \quad \text{ für } x \in U, v, w \in \mathbb{R}^{n}.$$

Die Funktion g ist genau dann eine Riemannsche Metrik, wenn die Bilinearform g(x) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist für alle $x \in U$. Der Punkt ist, dass dieses Skalarprodukt von x abhängt, und ebenso die Riemannsche Norm

$$||v||_{g(x)} = \sqrt{g(x)(v,v)}$$
 für $x \in U, v \in \mathbb{R}^n$.

Betrachte etwa eine Laufstrecke, die durch eine Parametrisierung $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ gegeben ist. Auf Asphalt ist die Geschwindigkeit eines Läufers konstant, zumindest idealisiert, seine Gesamtzeit T ist dann proportional zur Euklidischen Länge

$$T \sim L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(u)| du.$$

Bei einem Querfeldeinlauf hängt seine Geschwindigkeit aber von der lokalen Beschaffenheit des Bodens ab, die Gesamtzeit wird besser durch eine Riemannsche Länge modelliert:

$$T \sim L_g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(u)\|_{g(\gamma(u))} du = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(u))(\gamma'(u), \gamma'(u))} du.$$

Neben der Bogenlänge brauchen wir auch das Riemannsche Volumen von Mengen $E \subset U$. Wähle zu $x \in U$ eine Euklidische Orthonormalbasis v_1, \ldots, v_n , die g(x) diagonalisiert, also

$$\langle g(x)v_i, v_i \rangle = g(x)(v_i, v_i) = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle$$
 mit $\lambda_i = g(x)(v_i, v_i) > 0$.

Euklidisch spannen die v_i einen Würfel Q mit Volumen Eins auf. Bezüglich g(x) sind die Vektoren v_i orthogonal mit Länge $||v_i||_{q(x)} = \sqrt{\lambda_i}$, das Riemannsche Volumen von Q ist

$$\operatorname{vol}_{g(x)}(v_1,\ldots,v_n) = \sqrt{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} = \sqrt{\det g(x)}.$$

Wir definieren also das Riemannsche Volumenmaß durch $\mu_g = \mathcal{L}^n \cup \sqrt{\det g}$, nach Satz 5.1 gilt

$$\int f d\mu_g = \int f \sqrt{\det g} d\mathcal{L}^n \quad \text{für } \mathcal{L}^n\text{-messbare } f: U \to [0, \infty].$$

Als weitere Riemannsche Größen kommen jetzt Gradient und Divergenz bezüglich g hinzu.

Definition 8.3 (Riemannsche Differentialoperatoren) Sei $g \in C^0(U, \mathbb{R}^{n \times n})$ eine Riemannsche Metrik auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Der Gradient von $\varphi \in C^1(U)$ und die Divergenz von $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ bezüglich g sind

(8.6)
$$\operatorname{grad}_{g} \varphi = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \partial_{i} \varphi \, e_{j} \quad \text{wobei } g^{ij}(x) := \left(g(x)^{-1} \right)_{ij},$$

(8.7)
$$\operatorname{div}_{g} X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^{n} \partial_{i} \left(\sqrt{\det g} X^{i} \right), \quad \text{falls } g \in C^{1}(U, \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Für $\varphi \in C^2(U)$ definieren wir den Riemannschen Laplaceoperator (oder Laplace-Beltrami Operator) durch $\Delta_q \varphi = \text{div}_q \text{grad}_q \varphi$. In Koordinaten ergibt sich

$$\Delta_g \varphi = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (g^{ij} \sqrt{\det g} \, \partial_j \varphi).$$

Die Definition von grad_g und div_g ist motiviert durch die folgenden Eigenschaften.

Lemma 8.3 (Riemannsche partielle Integration) Sei $g \in C^0(U, \mathbb{R}^{n \times n})$ eine Riemannsche Metrik auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $\varphi \in C^1(U)$ und $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

$$(8.8) \hspace{1cm} g(x) \big(v, \operatorname{grad}_g \varphi(x) \big) \hspace{2mm} = \hspace{2mm} D \varphi(x) v \hspace{5mm} \textit{für alle } x \in U, \ v \in \mathbb{R}^n,$$

$$(8.9) \qquad \qquad \int_{U} g \left(\operatorname{grad}_{g} \varphi, X \right) d\mu_{g} = - \int_{U} \varphi \operatorname{div}_{g} X \, d\mu_{g} \quad \text{ für } \varphi \in C^{1}_{c}(U).$$

In (8.9) brauchen wir $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Die erste Aussage liefert die übliche Interpretation des Gradienten als Richtung des stärksten Anstiegs, nur eben hier bezüglich des Skalarprodukts g(x). Die zweite Aussage ist die partielle Integration, auch hier bezüglich des Skalarprodukts g.

Beweis: Wir zeigen (8.8) für $v = e_k$, und zwar gilt wegen $g_{kj} = g_{jk}$

$$g(e_k, \operatorname{grad}_g u) = g(e_k, \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_i u e_j) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n g^{ij} g_{jk}}_{=\delta_{ik}} \partial_i u = \partial_k u = Du \cdot e_k.$$

Die zweite Aussage folgt aus der Euklidischen partiellen Integration:

$$\int_{U} g(\operatorname{grad}_{g}\varphi, X) d\mu_{g} = \int_{U} g\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_{i}\varphi e_{j}, \sum_{k=1}^{n} X^{k} e_{k}\right) \sqrt{\det g} dx$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{U} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk}}_{=\delta_{ik}} \partial_{i}\varphi X^{k} \sqrt{\det g} dx$$

$$= -\int_{U} \sum_{i=1}^{n} \varphi \partial_{i} \left(\sqrt{\det g} X^{i}\right) dx$$

$$= -\int_{U} \varphi \operatorname{div}_{g} X d\mu_{g}.$$

Ein Diffeomorphismus $\phi: U \to V$ ordnet jedem Punkt $y \in V$ neue Koordinaten $x \in U$ zu, so dass $y = \phi(x)$. Wir wollen klären, wie sich dabei Funktionen und Vektorfelder transformieren. Eine Funktion $v: Y \to \mathbb{R}$ hat in den neuen Koordinaten die Darstellung

$$(8.10) u = v \circ \phi : U \to \mathbb{R}.$$

Ist zum Beispiel ϕ die Abbildung von einer Landkarte in das zugehörige Gebiet und beschreibt v(y) eine reale Temperaturverteilung, so gibt $u(x) = v(\phi(x))$ die Verteilung auf der Landkarte an. Funktionen u und v mit (8.10) nennen wir äquivalent unter ϕ . Ein Vektorfeld $Y: V \to \mathbb{R}^n$ wird auf der Karte aber nicht durch $Y \circ \phi$ dargestellt. Zeigt zum Beispiel Y nach Norden, so trifft das für $Y \circ \phi$ auf der Karte im allgemeinen nicht zu, je nach Position der Karte. Sei aber x(t) eine Kurve in U mit x(0) = x und x'(0) = X(x). Für die Bildkurve $y(t) = \phi(x(t))$ folgt dann $y(0) = \phi(x)$, und der von X(x) dargestellte Vektor ist $y'(0) = D\phi(x)X(x)$. Wir nennen also zwei Vektorfelder $X: U \to \mathbb{R}^n$ und $Y: V \to \mathbb{R}^n$ äquivalent unter ϕ , falls gilt:

$$(8.11) Y \circ \phi = D\phi \cdot X : U \to \mathbb{R}^n.$$

Zur Notation: die rechte Seite hat in $x \in U$ den Funktionswert $D\phi(x)X(x) \in \mathbb{R}^n$, der Punkt soll auf die Linearität bezüglich X hinweisen. Zu $Y: V \to \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein äquivalentes Feld X, nämlich $X(x) = D\phi(x)^{-1}Y(\phi(x))$. Soweit zu den allgemeinen Regeln (8.10) und (8.11); jetzt kommt wieder die Riemannsche Geometrie ins Spiel.

Definition 8.4 (Riemannsche Isometrie) Seien $g \in C^0(U, \mathbb{R}^{n \times n})$, $h \in C^0(V, \mathbb{R}^{n \times n})$ Riemannsche Metriken auf den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Ein Diffeomorphismus $\phi \in C^1(U, V)$ heißt Isometrie (bezüglich g und h), falls gilt:

(8.12)
$$g(x)(v,w) = h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) \quad \text{für alle } x \in U, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Definition ist ϕ genau dann eine Isometrie, wenn für jedes $x \in U$ die lineare Abbildung $D\phi(x): (\mathbb{R}^n, g(x)) \to (\mathbb{R}^n, h(\phi(x)))$ eine Isometrie von Euklidischen Vektorräumen ist. Wir

wollen sehen was das für die Matrizen g(x) und $h(\phi(x))$ bedeutet. Berechne

$$g_{jl}(x) = g(x)(e_j, e_l) = h(\phi(x))(D\phi(x)e_j, D\phi(x)e_l) = \sum_{i,k=1}^n D\phi(x)_{ij}h_{ik}(\phi(x))D\phi(x)_{kl}.$$

Da $D\phi(x)_{ij} = D\phi(x)_{ii}^{\mathrm{T}}$, ist (8.12) gleichbedeutend mit

(8.13)
$$g(x) = D\phi(x)^{\mathrm{T}} h(\phi(x)) D\phi(x).$$

Der folgende Satz besagt, dass die von uns eingeführten Riemannschen Größen unter Isometrien invariant sind, was im Fall von Funktionen und Vektorfeldern als Äquivalenz unter der Isometrie zu verstehen ist. Um die Formulierung nicht zu überfrachten, ist die Regularität der Funktionen u, v bzw. der Vektorfelder X, Y nicht spezifiziert, sie ist jeweils wie benötigt.

Satz 8.3 (Riemannsche Invarianz) Sei $\phi: (U,g) \to (V,h)$ eine Riemannsche Isometrie. Die Funktionen u, v sowie die Vektorfelder X, Y seien unter ϕ äquivalent. Dann gelten folgende Transformationsregeln:

- (a) Bogenlänge: $L_h(\phi \circ \gamma) = L_q(\gamma)$ für alle Kurven $\gamma \in C^1(I, U)$,
- (b) Volumenmaß: $\int v d\mu_h = \int u d\mu_q$, insbesondere $\mu_h(\phi(E)) = \mu_q(E)$.
- (c) Gradient: $(\operatorname{grad}_h v) \circ \phi = D\phi \cdot \operatorname{grad}_q u$.
- (d) Divergenz: $(\operatorname{div}_h Y) \circ \phi = \operatorname{div}_q X$.
- (e) Laplace: $(\Delta_h v) \circ \phi = \Delta_g u$.

In (d) und (e) nehmen wir dabei an, dass g und h C^1 -Metriken sind.

BEWEIS:

(a): Mit $(\phi \circ \gamma)'(t) = D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)$ folgt für die Bogenlänge

$$L_h(\phi \circ \gamma) = \int_I \|D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\|_{h(\phi(\gamma(t)))} dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))} dt = L_g(\gamma).$$

(b): Nach (8.13) gilt $\det g(x) = \det h(\phi(x)) |\det D\phi(x)|^2$, somit folgt durch Substitution $y = \phi(x)$ mit dem Transformationssatz

$$\int v \, d\mu_h = \int v(y) \sqrt{\det h(y)} \, dy$$

$$= \int v(\phi(x)) \sqrt{\det h(\phi(x))} \, |\det D\phi(x)| \, dx$$

$$= \int v(\phi(x)) \sqrt{\det g(x)} \, dx$$

$$= \int v \circ \phi \, d\mu_g.$$

Die zweite Formel ergibt sich durch Wahl von $v = \chi_{\phi(E)}$.

(c): Wir berechnen, wieder mit der Kettenregel,

$$h(\phi(x)) (\operatorname{grad}_{h} v(\phi(x)), D\phi(x)e_{i}) = Dv(\phi(x))D\phi(x)e_{i}$$

$$= D(v \circ \phi)(x)e_{i}$$

$$= g(x) (\operatorname{grad}_{g} u(x), e_{i})$$

$$= h(\phi(x)) (D\phi(x)\operatorname{grad}_{g} u(x), D\phi(x)e_{i}).$$

Die Vektoren $D\phi(x)e_i$ bilden eine Basis, also folgt (c).

(d): Sei $\varphi \in C_c^1(U)$ beliebig. Mit $\varphi = \psi \circ \phi$ gilt $(\operatorname{grad}_h \psi) \circ \phi = D\phi \cdot \operatorname{grad}_g \varphi$, außerdem ist nach Voraussetzung $Y \circ \phi = D\phi \cdot X$. Es folgt

$$h(\operatorname{grad}_h\psi,Y)\circ\phi=h\circ\phi(D\phi\cdot\operatorname{grad}_q\varphi,D\phi\cdot X)=g(\operatorname{grad}_q\varphi,X).$$

Wir berechnen nun mit partieller Integration

$$\int_{U} \varphi (\operatorname{div}_{h} Y) \circ \phi \, d\mu_{g} = \int_{V} \psi \, \operatorname{div}_{h} Y \, d\mu_{h}$$

$$= -\int_{V} h(\operatorname{grad}_{h} \psi, Y) \, d\mu_{h}$$

$$= -\int_{U} h(\operatorname{grad}_{h} \psi, Y) \circ \phi \, d\mu_{g}$$

$$= -\int_{U} g(\operatorname{grad}_{g} \varphi, X) \, d\mu_{g}$$

$$= \int_{U} \varphi \, \operatorname{div}_{g} X \, d\mu_{g}.$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, siehe Lemma 8.4 unten, folgt (d).

(e): Nach (c) gilt
$$(\operatorname{grad}_h v) \circ \phi = D\phi \cdot \operatorname{grad}_g u$$
, also folgt aus (d)
$$(\Delta_h v) \circ \phi = (\operatorname{div}_h \operatorname{grad}_h v) \circ \phi = \operatorname{div}_g \operatorname{grad}_g u = \Delta_g u.$$

Wir tragen noch das oben benutzte Lemma nach.

Lemma 8.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(U)$ mit $\int_U u\varphi \, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Dann ist u die Nullfunktion.

BEWEIS: Angenommen es gibt ein $x \in U$ mit u(x) > 0. Dann gibt es $\varrho > 0$ und $\delta > 0$ mit $u(x) \geq \delta$ auf $B_{\varrho}(x) \subset U$. Wähle eine Funktion $\eta \in C_c^{\infty}(U)$ mit spt $\eta \subset B_{\varrho}(x)$, $\eta \geq 0$ und $\int_{U} \eta(x) \, dx > 0$. Aus der Monotonie des Integrals ergibt sich der Widerspruch

$$0 = \int_{U} u(x)\eta(x) dx \ge \int_{U} \delta \eta(x) dx > 0.$$

Definition 8.5 (induzierte Metrik) Sei $\phi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus der offenen Mengen $U,V \subset \mathbb{R}^n$. Ist h eine Riemannsche Metrik auf V, so ist die durch ϕ induzierte Riemannsche Metrik defininiert durch

$$g(x)(v,w) = h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w)$$
 für alle $x \in U, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Per Definition ist also $\phi:(U,g)\to (V,h)$ eine Riemannsche Isometrie.

Man kann sagen, die induzierte Metrik kodiert die Geometrie von (V,h) im Urbild U von ϕ . Wählen wir für h die Euklidische Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so liefern unsere Formeln Darstellungen der klassischen Euklidischen Operatoren grad, div und Δ in den krummlinigen Koordinaten, die durch ϕ gegeben sind. Genauer haben wir gezeigt:

$$(\operatorname{grad} v) \circ \phi = D\phi \cdot \operatorname{grad}_g u \quad \text{wobei } u = v \circ \phi,$$

$$(\operatorname{div} Y) \circ \phi = \operatorname{div}_g X \quad \text{wobei } D\phi \cdot X = Y \circ \phi,$$

$$(\Delta v) \circ \phi = \Delta_g u \quad \text{wieder mit } u = v \circ \phi.$$

Beispiel 8.5 (Polarkoordinatendarstellung des Laplaceoperators) Betrachte nochmals die Polarkoordinatenabbildung im \mathbb{R}^3

$$\phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

 ϕ ist C^{∞} -Diffeomorphismus zwischen $U=(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$ und $V=\mathbb{R}^{3}\setminus\{(x,0,z):x\geq 0\}$, siehe Beispiel 8.4. Die induzierte Metrik ist

$$g: U \to \mathbb{R}^{3\times 3}, \ g(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich folgende Formeln:

$$\operatorname{grad}_{g} u = \left(\partial_{r} u, \frac{1}{r^{2}} \partial_{\theta} u, \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \partial_{\varphi} u\right),$$

$$\operatorname{div}_{g} X = \frac{1}{r^{2}} \partial_{r} (r^{2} X^{r}) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} \left(\sin \theta X^{\theta}\right) + \partial_{\varphi} X^{\varphi},$$

$$\Delta_{g} u = \frac{1}{r^{2}} \partial_{r} (r^{2} \partial_{r} u) + \frac{1}{r^{2} \sin \theta} \partial_{\theta} \left(\sin \theta \partial_{\theta} u\right) + \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} \partial_{\varphi}^{2} u.$$

Hier bezeichnet X^r, X^θ, X^φ die Standardkoordinaten im (r, θ, φ) -Raum. Für die Funktion $v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ ist u(r) = 1/r und somit $\Delta v = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Die Idee einer ortsabhängigen Geometrie, im Sinne der Riemannschen Metrik, hat Bernhard Riemann in seinem Habilitationsvortrag Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrundeliegen 1854 entworfen. Wir haben gesehen, dass die klassischen Differentialoperatoren in dieser Situation definiert werden können und invariant unter Isometrien sind, insbesondere der Laplace-Beltrami Operator. Riemann hat darüber hinaus ein Konzept von Krümmung entwickelt, das später grundlegend für die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde (Einstein 1915).

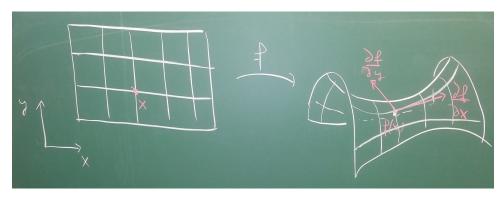
9 Das Flächenmaß auf Untermannigfaltigkeiten

Hauptziel dieses Abschnitts ist die Definition des Flächenmaßes für n-dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+k} . Dazu wird zunächst der Flächeninhalt für Immersionen ad hoc definiert und an einigen Beispielen motiviert. Diese Definition wird dann mittels lokaler Parameterdarstellungen auf Untermannigfaltigkeiten übertragen. Als Anwendung wird die Aufspaltung von Gebietsintegralen bezüglich Radial- und Winkelkoordinaten, die sogenannte Zwiebelformel, behandelt.

Zur Definition des Flächeninhalts muss erst geklärt werden, was unter einer Fläche zu verstehen ist. Am einfachsten ist der Begriff der parametrisierten Fläche oder Immersion. Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k}), U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt Immersion wenn gilt:

$$\operatorname{rang} Df(x) = n$$
 für alle $x \in U$.

Die Vektoren $\partial_j f(x) = Df(x)e_j$ für j = 1, ..., n bilden dann eine Basis von Bild $Df(x) \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Die Zahl n heißt Dimension, die Zahl k Kodimension von f.



Definition 9.1 (Flächenformel) Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Immersion. Der (n-dimensionale) Flächeninhalt von f auf $E \subset U$ ist

(9.1)
$$\mathcal{A}(f,E) = \int_{E} Jf(x) dx \quad mit \ Jf(x) = \sqrt{\det\left(Df(x)^{T}Df(x)\right)}.$$

Die Funktion If heißt Jacobische von f. ‡

Analog zu Definition 8.5 können wir auch hier die induzierte Metrik von f einführen:

(9.2)
$$g(x)(v,w) = \langle Df(x)v, Df(x)w \rangle \quad \text{bzw. } g(x) = Df(x)^{T}Df(x).$$

Es gilt $g(x)(v,v) = |Df(x)v|^2 > 0$ für $v \neq 0$, da f eine Immersion ist. Man kann sagen, die Riemannsche Metrik g kodiert die Geometrie "auf der Fläche", insbesondere gilt

(9.3)
$$Jf = \sqrt{\det g} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}(f, E) = \mu_g(E).$$

Wir betrachten nun einige Spezialfälle.

 $^{^{\}ddagger}\mathrm{C.\,G.\,J.\,\,Jacobi,\,\,1804-1851}$

Beispiel 9.1 Eine Immersion $f: I = (a, b) \to \mathbb{R}^m$, f = f(t), heißt auch reguläre Kurve. Es gilt $Jf(t) = \sqrt{f'(t)^T f'(t)} = |f'(t)|$, also ist die Länge von f nach Definition 9.1

$$\mathcal{L}(f) = \int_{a}^{b} |f'(t)| dt.$$

Allgemein zählt die Flächenformel das Maß des Bildes mit Vielfachheit, wenn es mehrfach überdeckt wird, zum Beispiel $L(f, [0, 3\pi]) = 3\pi$ für die Kurve $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

Beispiel 9.2 Eine zweidimensionale Immersion $f: U \to \mathbb{R}^3$, f = f(x, y), heißt auch reguläre Fläche. Die induzierte Metrik ist

$$g = \begin{pmatrix} |\partial_x f|^2 & \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle \\ \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle & |\partial_y f|^2 \end{pmatrix}.$$

Also lautet die Jacobische, wobei \times das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 ist,

$$Jf = \sqrt{|\partial_x f|^2 |\partial_y f|^2 - \langle \partial_x f, \partial_y f \rangle^2} = |\partial_x f \times \partial_y f|.$$

Hier wurde für $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Formel $|a|^2|b|^2 - \langle a, b \rangle^2 = |a \times b|^2$ benutzt. Betrachte als Spezialfall Polarkoordinaten auf \mathbb{S}^2 , also

$$f: U = (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, f(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Mit Beispiel 8.4 im vorigen Kapitel gilt $Jf(\theta,\varphi)=\sin\theta$, insbesondere ist f eine reguläre Fläche mit Flächeninhalt

$$\mathcal{A}(f) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi d\theta = 4\pi.$$

Beispiel 9.3 Sei $u \in C^1(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Graphenabbildung von u ist

$$f: U \to \mathbb{R}^{n+1}, f(x) = (x, u(x)).$$

Es gilt Df(x)v = (v, Du(x)v), also ist Df(x) injektiv und f eine Immersion. Die induzierte Metrik ist $g_{ij}(x) = \langle (e_i, \partial_i u), (e_j, \partial_j u) \rangle = \delta_{ij} + (\partial_i u) (\partial_j u)$, oder

$$g(x) = E_n + Du(x)^T Du(x)$$
 mit $Du(x)^T = \operatorname{grad} u(x)$.

Wir berechnen

$$g(x)v = \begin{cases} (1 + |Du(x)|^2)v & \text{falls } v = \text{grad } u(x), \\ v & \text{falls } v \perp \text{grad } u(x). \end{cases}$$

Es folgt $\det g(x) = 1 + |Du(x)|^2$, also ergibt sich die klassische Formel

(9.4)
$$A(f) = \int_{U} \sqrt{1 + |Du(x)|^2} \, dx.$$

Als geometrische Größe sollte sich der Flächeninhalt unter Euklidischen Bewegungen nicht ändern, auch darf er nicht von der Parametrisierung abhängen. Beides stellen wir nun fest.

Satz 9.1 (Invarianzen des Flächeninhalts) Es gelten folgende Aussagen.

- (a) Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ eine Immersion. Dann gilt $\mathcal{A}(B \circ f, E) = \mathcal{A}(f, E)$ für jede Euklidische Bewegung B.
- (b) Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n+k})$ eine Immersion. Dann gilt $\mathcal{A}(f \circ \phi, E) = \mathcal{A}(f, \phi(E))$ für jeden Diffeomorphismus $\phi \in C^1(U, V)$.

BEWEIS: B hat die Form B(p) = Sp + b wobei $S \in \mathbb{O}(n+k)$ und $b \in \mathbb{R}^{n+k}$. Es folgt

$$D(B \circ f)(x)^{\mathrm{T}} D(B \circ f)(x) = Df(x)^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} S Df(x) = Df(x)^{\mathrm{T}} Df(x).$$

Somit ist $J(B \circ f) = Jf$ und folglich $A(B \circ f, E) = A(f, E)$.

Für (b) berechne wieder mit der Kettenregel

$$D(f \circ \phi)(x)^T D(f \circ \phi)(x) = D\phi(x)^T Df(\phi(x))^T Df(\phi(x)) D\phi(x).$$

Nehmen wir die Determinante und dann die Wurzel, so folgt

(9.5)
$$J(f \circ \phi)(x) = Jf(\phi(x)) |\det D\phi(x)|.$$

Mit dem Transformationssatz folgt

$$\mathcal{A}(f,\phi(E)) = \int_{\phi(E)} Jf(y) \, dy = \int_E Jf(\phi(x)) |\det D\phi(x)| \, dx = \int_E J(f \circ \phi)(x) \, dx = \mathcal{A}(f \circ \phi, E).$$

Zu diesen Aussagen noch zwei Anmerkungen. Mit (a) folgt, dass die Flächenformel auf flachen Immersionen das richtige Ergebnis liefert. Genauer sei $\phi \in C^1(U,V), \ U,V \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein Diffeomorphismus und $B: \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Euklidische Bewegung. Identifizieren wir \mathbb{R}^n und $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$, so erhalten wir die flache Immersion $B \circ \phi$. Ihr Flächeninhalt ist dann wie er sein sollte, nämlich

$$\mathcal{A}(B \circ \phi, E) = \mathcal{A}(\phi, E) = \int_{E} J\phi(x) \, dx = \int_{E} |\det D\phi(x)| \, dx = \mathcal{L}^{n}(\phi(E)).$$

In (b) gilt allgemeiner folgendes: sind g und h die induzierten Metriken von f und $f \circ \phi$, so ist $\phi : (U, g) \to (V, h)$ eine Riemannsche Isometrie:

$$h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \langle Df(\phi(x))D\phi(x)v, Df(\phi(x))D\phi(x)w\rangle$$
$$= \langle D(f \circ \phi)(x)v, D(f \circ \phi)(x)w\rangle$$
$$= g(x)(v, w).$$

Die Aussage folgt damit alternativ aus Satz 8.3(b), denn es gilt

$$\mathcal{A}(f,\phi(E)) = \mu_h(\phi(E)) = \mu_g(E) = \mathcal{A}(f,E).$$

Wir wollen nun einen globaleren Standpunkt einnehmen und Flächen betrachten, die nicht bzw. nicht a priori durch eine einzige Parametrisierung gegeben sind. Unser Ziel ist es, auf diesen Flächen – genauer: Untermannigfaltigkeiten – ein n-dimensionales Flächenmaß zu definieren. Wir erinnern vorher an die relevanten Begriffe aus Analysis II, siehe Kapitel 8 dort.

Definition 9.2 (Untermannigfaltigkeit) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, heißt n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 , falls gilt: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und einen C^1 -Diffeomorphismus $\phi : W \to \phi(W) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit

$$\phi(M \cap W) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \phi(W).$$

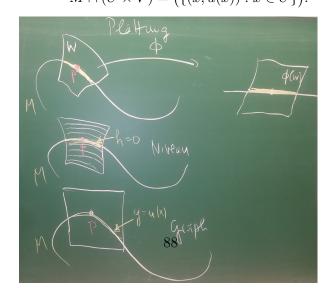
Wir nennen ϕ eine lokale Plättung von M. Folgende alternative Charakterisierungen sind aus Analysis II bekannt.

Satz 9.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien) Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Für $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) M ist eine n-dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit.
- (2) Niveaumengenkriterium: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und eine Funktion $h \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$ mit rang Dh(q) = k für alle $q \in W$, so dass

$$M \cap W = \{ q \in W : h(q) = 0 \}.$$

(3) Graphenkriterium: Zu jedem $p \in M$ gibt es nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ und eine Funktion $u \in C^1(U, V)$, so dass gilt: $M \cap (U \times V) = \{\{(x, u(x)) : x \in U\}\}.$



Beispiel 9.4 Die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ ist eine C^1 -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} der Dimension n, denn für jedes $p \in \mathbb{S}^n$ können wir im Niveaumengenkriterium $W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $h(q) = |q|^2 - 1$ wählen:

$$Dh(q) = 2q \neq 0 \text{ auf } W \text{ und } \mathbb{S}^n \cap W = \mathbb{S}^n = \{q \in W : h(q) = 0\}.$$

Im folgenden betrachten wir $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ als metrischen Raum, mit der induzierten Metrik d(p,q) = |p-q|. Wir können dann von offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M reden. Wir brauchen folgende Tatsachen, siehe auch Beispiel 1.2 in Analysis 2:

- ist $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ abgeschlossen, so ist $M \cap A$ abgeschlossen in M.
- $K \subset M$ ist genau dann kompakt in M, wenn K kompakt in \mathbb{R}^{n+k} ist.
- $V \subset M$ ist genau dann offen in M, wenn $V = M \cap W$ für eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

Satz 9.3 (σ -Kompaktheit von Untermannigfaltigkeiten) Jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist als abzählbare Vereinigung $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ von kompakten Mengen K_i darstellbar.

BEWEIS:

Schritt 1: M ist lokal kompakt.

Sei W offene Umgebung von p mit $M \cap W = h^{-1}\{0\}$ wie in Satz 9.2(2). Wir zeigen: ist $\overline{B_r(p)} \subset W$ so ist $M \cap \overline{B_r(p)}$ kompakt. Denn eine Folge $q_k \in M \cap \overline{B_r(p)}$ konvergiert, nach Wahl einer Teilfolge, gegen ein $q \in \overline{B_r(p)}$. Da h stetig, folgt $h(q) = \lim_{k \to \infty} h(q_k) = 0$ und damit auch $p \in M$.

Schritt 2: M ist separabel, d.h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge P. Betrachte die Gitterwürfel $Q_{j,l} = 2^{-l}(j + [0,1]^n)$ für $j \in \mathbb{Z}^{n+k}$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Wähle in jedem Würfel $Q_{j,l}$ mit $M \cap Q_{j,l} \neq \emptyset$ einen Punkt $p_{j,l}$. Die Menge P dieser Punkte ist dicht.

Schritt 3: Beweis des Satzes.

Die Mengen $M \cap \overline{B_r(p)}$ sind abgeschlossen in (M, d). Setze

$$r(p) = \sup\{r > 0 : M \cap \overline{B_r(p)} \text{ ist kompakt}\}.$$

Für $r \in (0, r(p))$ ist dann $M \cap \overline{B_r(p)}$ in einer kompakten Menge enthalten, und damit selbst kompakt. Seien $p_k, p \in M$ mit $p_k \to p$ und r < r(p). Mit $\varrho \in (r, r(p))$ liegt $M \cap \overline{B_r(p_k)}$ in $M \cap \overline{B_\varrho(p)}$ für k hinreichend groß, ist also kompakt. Es folgt $r(p_k) \geq r$ und damit $\lim_{k \to \infty} r(p_k) \geq r(p) > 0$. Es folgt nun

$$M = \bigcup_{p \in P} M \cap \overline{B_{\varrho(p)}(p)} \text{ mit } \varrho(p) = \begin{cases} r(p)/2 & \text{ falls } r(p) < \infty, \\ 1 & \text{ falls } r(p) = \infty. \end{cases}$$

Denn zu $p \in M$ gibt es eine Folge $p_k \in P$ mit $p_k \to p$ und $\liminf_{k \to \infty} \varrho(p_k) > 0$, also $p \in M \cap \overline{B_{\varrho(p_k)}(p_k)}$ für k groß. Damit haben wir eine Darstellung wie verlangt.

Definition 9.3 (lokale Parametrisierung) Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1 . Eine lokale Parametrisierung von M ist eine injektive Immersion $f: U \to M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, der Klasse C^1 .

Wir beabsichtigen, die Untermannigfaltigkeit M durch Bildgebiete von Parametrisierungen zu überdecken und das Maß in jedem einzelnen Bildgebiet mit der Flächenformel zu berechnen.

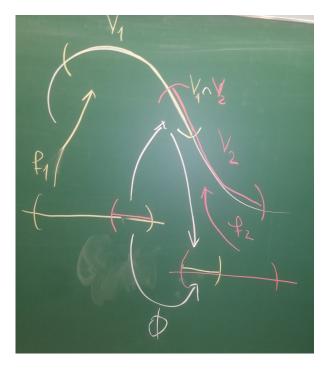
Lemma 9.1 Für jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ der Klasse C^1 gibt es lokale C^1 -Parametrisierungen $f_i: U_i \to M$, wobei $i \in \mathbb{N}$, so dass $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(U_i)$.

BEWEIS: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Plättung $\phi : W \to \phi(W)$ mit $p \in W$. Dann ist $U = \mathbb{R}^n \cap \phi(W)$ offen in \mathbb{R}^n , und $f = \phi^{-1}|_{\mathbb{R}^n \cap \phi(W)}$ ist eine lokale Parametrisierung von M mit $p \in f(U)$. Außerdem ist das Bildgebiet $f(U) = M \cap W$ offen in M. Eine kompakte Menge $K \subset M$ wird also durch endlich viele Bildgebiete überdeckt. Die Behauptung folgt mit Satz 9.3.

Die folgenden Eigenschaften von lokalen Parametrisierungen sind wesentlich.

Satz 9.4 Für eine C^1 -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gelten folgende Aussagen.

- (1) Ist $f: U \to M$ eine lokale Parametrisierung von M, so ist f(U) offen in M und $f: U \to f(U)$ ist homeomorph, das heißt f^{-1} ist stetig bezüglich der induzierten (Euklidischen) Metrik auf f(U).
- (2) Sind $f_i: U_i \to f(U_i) = V_i$ für i = 1, 2 lokale C^1 -Parametrisierungen von M, so ist $f_2^{-1} \circ f_1: f_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to f_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ein C^1 -Diffeomorphismus.



BEWEIS: Wir zeigen (1) erst im Fall dass eine lokale Plättung $\phi: W \to \phi(W)$ existiert mit $f(U) \subset W$. Dann ist $\phi \circ f: U \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ definiert, injektiv, und es gilt

rang
$$D(\phi \circ f)(x) = \text{rang} (D\phi(f(x)) Df(x)) = n$$
 für alle $x \in U$.

Also ist $V = (\phi \circ f)(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\phi \circ f : U \to V$ ist C^1 -Diffeomorphismus. Es folgt

$$f(U) = \phi^{-1}(V) = M \cap \phi^{-1}(V \times \mathbb{R}^k),$$

das heißt f(U) ist offen in M. Weiter folgt aus der Darstellung $f^{-1} = (\phi \circ f)^{-1} \circ \phi|_{f(U)}$ die Stetigkeit. Um nun (1) allgemein zu zeigen, wähle zu $p \in f(U)$ eine Plättung $\phi : W \to \phi(W)$ mit mit $p \in W$, und setze $\tilde{U} = U \cap f^{-1}(W)$ sowie $\tilde{f} = f|_{\tilde{U}}$. Dann ist $f(\tilde{U}) \subset f(U)$ offene Umgebung von p, also f(U) offen in M. Und $f^{-1}|_{f(\tilde{U})} = (f|_{\tilde{U}})^{-1}$ ist stetig, das heißt f^{-1} ist stetig auf ganz f(U).

Für (2) reicht es zu zeigen, dass jedes $x \in f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ eine Umgebung hat, auf der $f_2^{-1} \circ f_1$ eine C^1 -Abbildung ist. Sei $\phi : W \to \phi(W)$ lokale Plättung mit $f(x) \in M \cap W$. Nach Verkleinerung gilt $f(U_i) \subset W$ für i = 1, 2, und

$$f_2^{-1} \circ f_1 = (\phi \circ f_2)^{-1} \circ (\phi \circ f_1)$$
 auf $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$.

Die Abbildungen rechts sind von der Klasse C^1 , wie unter Aussage (1) gezeigt.

Wir haben drei Kriterien dafür diskutiert, dass eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit ist, nämlich die Darstellung durch Plättungen, Niveaumengen und Graphen. Die lokale Darstellung mit Immersionen führt auf ein viertes Kriterium. Eine injektive C^1 -Immersion $f:U\to\mathbb{R}^{n+k}$ heißt C^1 -Einbettung, wenn zusätzlich $f:U\to f(U)$ homeomorph ist, das heißt f^{-1} ist stetig bezüglich der Euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^{n+k} . Damit lautet das Kriterium:

Zu jedem $p \in M$ gibt es eine C^1 -Einbettung $f: U \to f(U)$, so dass f(U) eine offene Umgebung von p in M ist.

Die Eigenschaft ist auf jeden Fall notwendig: ist $\phi: W \to \phi(W)$ eine lokale Plättung, so kann $U = \mathbb{R}^n \cap \phi(W)$ und $f = \phi^{-1}|_U$ gewählt werden, denn $f^{-1} = \phi|_{M \cap W}$ ist stetig und $f(U) = M \cap W$ ist offen in M. Es kann gezeigt werden, dass das Kriterium auch hinreichend ist. Zum Nachweis, dass eine Menge M eine Untermannigfaltigkeit ist, finde ich allerdings die anderen Kriterien praktischer; es kann für eine gegebene injektive Immersion $f: U \to M$ schwierig sein zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist und f(U) offen in M. Ist dagegen M schon als Untermannigfaltigkeit erkannt, so sind diese Eigenschaften automatisch nach Satz 9.4(1). Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist mit der induzierten Metrik ein metrischer Raum, also haben wir die Borelmengen \mathcal{B}_M . Ist $f: U \to M$ eine lokale Parametrisierung und $B \in \mathcal{B}_M$, so ist $f^{-1}(B)$ eine Borelmenge im \mathbb{R}^n . Denn das System \mathcal{B}_f aller $B \in \mathcal{B}_M$ mit $f^{-1}(B)$ Borel ist eine σ -Algebra: es gilt $\emptyset \in \mathcal{B}_f$, und für $B, B_i \in \mathcal{B}_f$ ist

$$f^{-1}(M\backslash B) = U\backslash f^{-1}(B)$$
 und $f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i).$

Für $V \subset M$ offen ist $f^{-1}(V)$ offen im \mathbb{R}^n , da f stetig, also folgt $\mathcal{B}_f = \mathcal{B}_M$ wie behauptet.

Satz 9.5 (Flächenmaß) Sei M eine n-dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} . Dann gibt es auf M genau ein Radonmaß μ_M , so dass für jede lokale Parametrisierung $f: U \to f(U) = V$ und jede Borelmenge $E \subset V$ gilt:

(9.6)
$$\mu_M(E) = \int_{f^{-1}(E)} Jf(x) \, dx.$$

Beweis: Seien $f_i:U_i\to f_i(U_i)=V_i$ lokale Parametrisierungen so dass $M=\bigcup_{i=1}^\infty V_i$, siehe Lemma 9.1. Mit $M_i=V_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}V_j$ ist $M=\bigcup_{i=1}^\infty M_i$ eine disjunkte Zerlegung in Borelmengen $M_i\subset V_i$. Ist μ ein Radonmaß wie in der Behauptung, so folgt für $E\in\mathcal{B}_M$

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E \cap M_i)} Jf_i(x) dx.$$

Das beweist die Eindeutigkeit, denn μ ist durch die Werte auf \mathcal{B}_M schon festgelegt. Zur Existenz formulieren wir (9.6) um, und zwar gilt mit $\mu_f = f(\mathcal{L}^n \sqcup Jf)$ die Darstellung

(9.7)
$$\int_{f^{-1}(E)} Jf(x) dx = \mu_f(E) \quad \text{falls } f^{-1}(E) \mathcal{L}^n\text{-messbar}.$$

Wir definieren nun μ_M für $E \subset M$ beliebig durch

(9.8)
$$\mu_M(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E \cap M_i) \quad \text{wobei } \mu_i = \mu_{f_i}.$$

 μ_M ist ein äußeres Maß, denn $\mu_M(\emptyset)=0$ und für $E\subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ gilt

$$\mu_M(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E \cap M_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(E_j \cap M_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E_j \cap M_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_M(E_j).$$

Jetzt zeigen wir: ist $f_i^{-1}(E)$ \mathcal{L}^n -messbar für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist E μ_M -messbar; insbesondere sind alle Borelmengen μ_M -messbar. Und zwar ist E μ_i -messbar nach Satz 1.1 (Bildmaß) und Satz 5.1 (Maß mit Dichte), also folgt für $S \subset M$

$$\mu_{M}(S \cap E) + \mu_{M}(S \setminus E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{i}(S \cap M_{i} \cap E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{i}(S \cap M_{i} \setminus E)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{i}(S \cap M_{i})$$

$$= \mu_{M}(S).$$

Als nächstes beweisen wir (9.6) für die $E \subset M$, für die $f^{-1}(E)$ und $f_i^{-1}(E)$, $i \in \mathbb{N}$, \mathcal{L}^n -messbar sind. Wir wollen die Invarianz des Flächeninhalts unter Umparametrisierungen verwenden,

hier bzgl. der Diffeomorphismen $\phi_i: f_i^{-1}(V_i \cap V) \to f^{-1}(V_i \cap V), \ \phi_i = f^{-1} \circ f_i$. Es gilt $f_i = f \circ \phi_i$ auf $f_i^{-1}(V_i \cap V)$ sowie $\phi_i \circ f_i^{-1} = f^{-1}$ auf $V_i \cap V$. Mit (9.7) folgt

$$\mu_i(E \cap M_i) = \mathcal{A}(f_i, f_i^{-1}(E \cap M_i)) = \mathcal{A}(f, \phi_i(f_i^{-1}(E \cap M_i))) = \mu_f(E \cap M_i).$$

Es folgt, da $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ disjunkte Borelzerlegung und $E \mu_M$ -messbar,

$$\mu_M(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E \cap M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(E \cap M_i) = \mu_f(E) = \int_{f^{-1}(E)} Jf(x) dx.$$

Sei nun $K \subset M$ kompakt. Wähle zu $p \in K$ eine lokale Parametrisierung $f: U \to V$ mit p = f(x) für ein $x \in U$. Für r > 0 klein ist dann $\overline{B_r(x)} \subset U$, und aus (9.6) folgt

$$\mu_M(f(B_r(x))) = \int_{B_r(x)} Jf(y) \, dy < \infty.$$

Nach Satz 9.4 ist $f(B_r(x))$ eine offene Umgebung von p. Die Menge K wird durch endlich viele solche Umgebungen überdeckt. Schließlich bleibt zu prüfen dass μ_M Borelregulär ist. Sei $f: U \to f(U) = V$ eine lokale Parametrisierung. Wir behaupten zunächst: zu $A \subset U$ gibt es B Borel mit $A \subset B \subset U$ und

$$\mathcal{L}^n \sqcup Jf(A) = \mathcal{L}^n \sqcup Jf(B) = \int_B Jf(x) \, dx.$$

Nach Satz 5.1 gibt es nämlich eine \mathcal{L}^n -messbare Folge $A \subset B_k \subset U$ mit

$$\mathcal{L}^{n} \sqcup Jf(A) = \lim_{k \to \infty} \int_{B_k} Jf(x) \, dx.$$

Nach Folgerung 2.1 können wir die B_k Borel wählen, mit $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ folgt die Behauptung. Ist nun $E \subset V$ beliebig, so erhalte B Borel mit $f^{-1}(E) \subset B \subset U$, also $E \subset f(B)$, und

$$f(\mathcal{L}^n \llcorner Jf)(E) = \mathcal{L}^n \llcorner Jf(f^{-1}(E)) = \mathcal{L}^n \llcorner Jf(B) = f(\mathcal{L}^n \llcorner Jf)(f(B)).$$

Man sieht wie oben, dass f Borelmengen in Borelmengen abbildt. Sei nun $E \subset M$ beliebig. Wir wenden das Argument an auf $E \cap M_i$, und erhalten $C_i = f(B_i) \in \mathcal{B}_M$ so dass $E \cap M_i \subset C_i$ und $\mu_i(E \cap M_i) = \mu_i(C_i)$. Da M_i selbst Borel ist, können wir $C_i \subset M_i$ annehmen. Insgesamt ist dann $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \supset E$ Borel mit

$$\mu_M(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(E \cap M_i) = \mu_M(E).$$

Wir wollen den Satz wie folgt ergänzen.

Satz 9.6 Sei M eine n-dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} mit zugehörigem Flächenmaß μ_M . Dann gilt:

- (a) $N \subset M$ ist genau dann eine μ_M -Nullmenge, wenn $f^{-1}(N)$ eine \mathcal{L}^n -Nullmenge ist für jede lokale Parametrisierung $f: U \to M$.
- (b) $E \subset M$ ist genau dann μ_M -messbar, wenn $f^{-1}(E)$ \mathcal{L}^n -messbar ist für jede lokale Parametrisierung $f: U \to M$, und für E gilt dann auch die Formel (9.6).

BEWEIS:

(a): Sei $f_i: U_i \to f(U_i) = V_i$ eine abzählbare Familie von lokalen Parametrisierungen von M. Sei $N \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ so dass $f_i^{-1}(N)$ eine \mathcal{L}^n -Nullmenge ist für alle $i \in I$. Nach (9.6) gilt

$$0 = \int_{f_i^{-1}(N)} Jf_i(x) \, dx = \mu_M(N \cap V_i),$$

also ist N eine μ_M -Nullmenge. Sei umgekehrt $\mu_M(N) = 0$. Da μ_M ein Radonmaß ist, gibt es $B \supset N$ Borel mit $\mu_M(B) = 0$, und es folgt wieder mit (9.6)

$$0 = \mu_M(B \cap V) = \int_{f^{-1}(B)} Jf(x) \, dx.$$

Wegen Jf > 0 ist $f^{-1}(N) \subset f^{-1}(B)$ eine \mathcal{L}^n -Nullmenge.

(b): Seien $f_i: U_i \to V_i$, $i \in \mathbb{N}$, die lokalen Parametrisierungen aus Satz 9.5, insbesondere $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. Wir haben dort gezeigt: sind die Mengen $f_i^{-1}(E)$ \mathcal{L}^n -messbar für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist E μ_M -messbar. Umgekehrt beachten wir, dass M mit der induzierten Metrik lokal kompakt und σ -kompakt ist, siehe Satz 9.3. Am Ende von Kapitel 2 hatten wir bemerkt, dass damit messbare Mengen wie in Folgerung 2.1 charakterisiert sind: $E \subset M$ ist genau dann μ_M -messbar, wenn $E = B \cup N$ mit B Borel und $\mu_M(N) = 0$. Für eine lokale Parametrisierung $f: U \to M$ ist $f^{-1}(B)$ eine Borelmenge im \mathbb{R}^n und $f^{-1}(N)$ ist eine \mathcal{L}^n -Nullmenge. Also ist $f^{-1}(E) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(N)$ \mathcal{L}^n -messbar.

Aus dem Beweis ergibt sich folgende Tatsache: um zu zeigen, dass eine Menge $E \subset M$ Maß Null hat oder messbar ist, muss nicht jede lokale Parametrisierung untersucht werden, es reicht eine Familie die E überdeckt. Um den Flächeninhalt von M auszurechnen, wird man M bis auf eine Nullmenge in messbare Mengen M_i zerlegen, die jeweils in einem Parametergebiet liegen. Auf den M_i kann dann (9.6) angewandt werden. In einfachen Fällen reicht schon eine einzige Parametrisierung aus. Entsprechend kann man bei Oberflächenintegralen vorgehen.

Folgerung 9.1 (Oberflächenintegral) Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} der Klasse C^1 . Gegeben sei eine abzählbare, messbare Zerlegung $M \setminus N = \bigcup_{i \in I} M_i$, wobei $\mu_M(N) = 0$ und $M_i \subset V_i$ für lokale Parametrisierungen $f_i : U_i \to V_i$. Dann gilt

$$\int_{M} u \, d\mu_{M} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_{i}^{-1}(M_{i})} u(f_{i}(x)) J f_{i}(x) \, dx,$$

wenn entweder $u \geq 0$ messbar oder $u \in L^1(\mu_M)$.

BEWEIS: Die Aussage gilt nach Satz 9.5, in Verbindung mit Satz 9.6(b), wenn u eine charakteristische Funktion ist, und damit auch für messbare Treppenfunktionen. Für $u \geq 0$ folgt die Behauptung durch Approximation von unten mit Treppenfunktionen u_k aus dem Satz über monotone Konvergenz. Auf der rechten Seite benutzt man monotone Konvergenz erst für die einzelnen Integrale und dann nachmals für die Reihe. Für $u \in L^1(\mu_M)$ zerlegen wir in u^+ und u^- .

Lemma 9.2 (Transformation des Flächenmaßes unter Ähnlichkeiten) Sei M eine n-dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} . Ist $S: \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, $S(p) = \lambda \ Q(p+a)$ $mit \ \lambda > 0, \ Q \in \mathbb{O}(n+k)$ und $a \in \mathbb{R}^{n+k}$, so gilt

(9.9)
$$\mu_{SM}(SE) = \lambda^n \mu_M(E) \quad \text{für alle } E \subset M,$$

(9.10)
$$\int_{SM} v \, d\mu_{SM} = \lambda^n \int_M v \circ S \, d\mu_M, \quad \text{falls eines der Integrale existiert.}$$

BEWEIS: Man sieht leicht, dass $\nu(E) = \lambda^{-n} \mu_{SM}(SE)$ ein Radonmaß auf M definiert. Ist $f: U \to V$ eine lokale Parametrisierung von M, so ist $S \circ f: U \to SV$ lokale Parametrisierung von SM. Da $DS(p) = \lambda Q$ für $p \in \mathbb{R}^{n+k}$, gilt

$$D(S \circ f)(x)^{\mathrm{T}}D(S \circ f)(x) = \lambda^{2}Df(x)^{\mathrm{T}}Df(x),$$

also $J(S \circ f)(x) = \lambda^n Jf(x)$. Es folgt für $E \subset V$ Lebesguemessbar

$$\nu(E) = \lambda^{-n} \int_{(S \circ f)^{-1}(SE)} J(S \circ f)(x) \, dx = \int_{f^{-1}(E)} Jf(x) \, dx.$$

Wegen Eindeutigkeit folgt $\nu = \mu_M$, also gilt (9.9). Aussage (9.10) folgt dann zuerst im Fall $v = \chi_B$, mit $B \subset T(M)$ messbar, dann für messbares $v \geq 0$ durch Approximation von unten mit Treppenfunktionen, siehe Satz 4.4, und schließlich durch Zerlegung $v = v^+ - v^-$ für beliebige messbare Funktionen v.

Satz 9.7 (Zwiebelformel) Für $u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ ist $u|_{\partial B_r} \in L^1(\mu_{\partial B_r})$ für fast alle r > 0, wobei $\partial B_r = \partial B_r(0)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(p) \, dp = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} u(p) \, d\mu_{\partial B_r}(p) \, dr = \int_0^\infty r^n \int_{\mathbb{S}^n} u(r\omega) \, d\mu_{\mathbb{S}^n}(\omega) \, dr.$$

BEWEIS: Sei $f: U \to V \subset \mathbb{S}^n$ lokale Parametrisierung und $C(V) = \{r\omega : \omega \in V, r > 0\}$ der offene Kegel über V. Betrachte den Diffeomorphismus

$$\phi:(0,\infty)\times U\to C(V),\,\phi(r,x)=rf(x).$$

Mit $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle$ lautet die induzierte Metrik von ϕ

$$D\phi(r,x)^T D\phi(r,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 g(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Ist E=f(A) für \mathcal{L}^n -messbares $A\subset U$ und C(E) der Kegel über E, so folgt aus dem Transformationssatz und Fubini

$$\int_{C(E)} u(p) dp = \int_{(0,\infty)\times A} u(rf(x)) r^n \sqrt{\det g(x)} d\mathcal{L}^{n+1}(r,x)$$

$$= \int_0^\infty r^n \int_A u(rf(x)) \sqrt{\det g(x)} dx dr$$

$$= \int_0^\infty r^n \int_E u(r\omega) d\mu_{\mathbb{S}^n}(\omega) dr$$

$$= \int_0^\infty \int_{\{r\omega:\omega\in E\}} u(p) d\mu_{\partial B_r}(p) dr,$$

wobei zuletzt Lemma 9.2 benutzt wurde. Wähle nun eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{S}^n = \bigcup_{j=1}^N E_j$ mit $E_j \subset V_j$, wobei $f_j : U_j \to V_j$ lokale Parametrisierungen sind. Durch Addition folgt die Behauptung.

Beispiel 9.5 Mit $u = \chi_{B_1(0)}$ folgt für das Maß $\omega_n = \mu_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n)$ der *n*-dimensionalen Sphäre

$$\alpha_{n+1} = \mathcal{L}^{n+1}(B_1(0)) = \int_0^1 \mu_{\partial B_r}(\partial B_r) dr = \int_0^1 \omega_n r^n dr = \frac{\omega_n}{n+1},$$

also zum Beispiel $\omega_1=2\pi,\ \omega_2=4\pi$ und $\omega_3=2\pi^2,\ \text{vgl.}$ Beispiel 7.4.

Bemerkung 9.1 In Anwendungen tritt oft das Problem auf, ob eine gegebene Folge M_j von Untermannigfaltigkeiten eine konvergente Teilfolge hat. Die Frage, was ein geeigneter Konvergenzbegriff sein könnte, ist überhaupt nicht trivial. Es kommt natürlich darauf an, welche Kontrolle man für die M_j zur Verfügung hat. Wir wollen hier die Situation betrachten, wenn gleichmäßige Flächenschranken gegeben sind. Um das zu formulieren, setzen wir das Fächenmaß μ_M zu einem Maß μ auf ganz \mathbb{R}^{n+k} fort, und zwar setzen wir

$$\mu(E) = \mu_M(E \cap M)$$
 für alle $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

Man kann zeigen, dass μ ein Borelmaß ist und außerdem Borelregulär. Im allgemeinen ist μ kein Radonmaß: ist zum Beispiel $M \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Kreise um den Nullpunkt mit Radius 1/i, $i \in \mathbb{N}$, so ist

$$\mu(B_r(0)) = \mu_M(B_r(0) \cap M) = \infty$$
 für alle $r > 0$.

Hier wollen wir aber für die M_j voraussetzen, dass der Flächeninhalt lokal endlich ist. Die zugehörigen Maße μ_j sind dann Radonmaße. Darüber hinaus wollen wir eben gleichmäßige Flächenschranken annehmen, das heißt

$$\mu_j(B_R(0)) = \mu_{M_j}(B_R(0) \cap M_j) \le C(R) < \infty \quad \text{ für alle } R > 0, \ j \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionalanalysis liefert nun folgende Konvergenzaussage: es gibt ein Radonmaß σ auf \mathbb{R}^{n+k} so dass nach Wahl einer Teilfolge $\mu_j \to \sigma$, im Sinne dass

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n+k}}\varphi\,d\mu_j=\int_{\mathbb{R}^{n+k}}\varphi\,d\sigma\quad\text{ für alle }\varphi\in C^0_c(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Wir haben so zwar keine Mannigfaltigkeit als Limes gefunden, aber zumindest das Maß σ als Grenzobjekt. Ob es eventuell zu einer gewissen Untermannigfaltigkeit Σ gehört, kann weiter untersucht werden.

10 Der Integralsatz von Gauß

In diesem Abschnitt beweisen wir den Integralsatz von Gauß (Englisch: divergence theorem), der eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist. Aussage des Satzes ist, unter geeigneten technischen Voraussetzungen, die Formel

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial \Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Dabei ist X ein Vektorfeld, ν die äußere Einheitsnormale auf dem Rand von Ω und μ das Flächenmaß auf $\partial\Omega$. In der Flüssigkeitsdynamik und der Elektrodynamik wird die Divergenz als Quellenstärke und das Randintegral als Fluss des Vektorfelds durch $\partial\Omega$ interpretiert. Aus dem Satz folgen dann entsprechende Erhaltungsgesetze.

Vorab behandeln wir heuristisch den Fall, wenn das zugrundeliegende Gebiet ein achsenparalleler Quader Q ist, das heißt $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Außerhalb der niederdimensionalen Kanten ist die äußere Einheitsnormale

$$\nu(x) = \begin{cases} -e_i & \text{für } x \in \partial Q \text{ mit } x_i = a_i \\ e_i & \text{für } x \in \partial Q \text{ mit } x_i = b_i. \end{cases}$$

Wir setzen $Q_i = (a_1, b_1) \times ... \times \widehat{(a_i, b_i)} \times ... \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, wobei das Dach bedeutet, dass der Faktor wegzulassen ist. Für ein hinreichend glattes Vektorfeld $X : \overline{Q} \to \mathbb{R}^n$ berechnen wir mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{Q} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^{n} = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q} \frac{\partial X_{i}}{\partial x_{i}} \, d\mathcal{L}^{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_{i}} \int_{a_{i}}^{b_{i}} \frac{\partial X_{i}}{\partial x_{i}} (x_{1}, \dots, x_{i}, \dots, x_{n}) \, dx_{i} \, dx_{1} \dots \widehat{dx_{i}} \dots dx_{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_{i}} X_{i}(x_{1}, \dots, b_{i}, \dots, x_{n}) \, dx_{1} \dots \widehat{dx_{i}} \dots dx_{n}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_{i}} X_{i}(x_{1}, \dots, a_{i}, \dots, x_{n}) \, dx_{1} \dots \widehat{dx_{i}} \dots dx_{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\{x_{i} = b_{i}\}} \langle X(x), e_{i} \rangle \, d\mu(x) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\{x_{i} = a_{i}\}} \langle X(x), e_{i} \rangle \, d\mu(x)$$

$$= \int_{\partial Q} \langle X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Aber wir wollen die Aussage nicht nur für Quader haben. Eine geeignete Klasse von Gebieten wird in folgendem Satz definiert. Dieser ist analog zu den Untermannigfaltigkeitskriterien, siehe Satz 9.2 beziehungsweise Analysis II, Satz 24.2.

Satz 10.1 (Kriterien für C^1 -Rand) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sind äquivalent:

(1) Plättung: zu jedem $p \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^1 Diffeomorphismus $\phi: W \to \phi(W)$ mit

$$\phi(\Omega \cap W) = \mathbb{H}^n \cap \phi(W), \text{ wobei } \mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0).$$

(2) Subniveau: zu jedem $p \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $h \in C^1(W)$ mit $Dh(q) \neq 0$ für alle $q \in W$, so dass

$$\Omega \cap W = \{ q \in W : h(q) < 0 \}.$$

(3) Subgraph: zu jedem $p \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine C^1 -Funktion $u: U \to I$, so dass nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten gilt:

$$\Omega \cap (U \times I) = \{(x, y) \in U \times I : y < u(x)\}.$$

Die Menge Ω hat C^1 -Rand, wenn eines (und damit jedes) der drei Kriterien erfüllt ist.

In diesem Kapitel arbeiten wir ausschließlich mit dem Subgraphenkriterium (3). Anschaulich hat eine Menge C^1 -Rand, wenn ihr Rand eine (n-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, und die Menge lokal auf einer Seite des Randes liegt. Dies wird in folgendem Lemma präzisiert.

Lemma 10.1 In der Situation von Satz 10.1(3) gilt

$$\partial\Omega\cap(U\times I) = \{(x,y)\in U\times I: y=u(x)\},$$

$$(\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega})\cap(U\times I) = \{(x,y)\in U\times I: y>u(x)\}.$$

Insbesondere ist $\partial\Omega$ eine (n-1)-dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n nach dem Graphenkriterium in Satz 9.2.

BEWEIS: Mit der Funktion $h: U \times I \to \mathbb{R}$, h(x,y) = y - u(x), gilt nach Voraussetzung $\Omega \cap (U \times I) = \{h < 0\}$. Aus der Stetigkeit von h folgt $\partial \Omega \cap (U \times I) \subset \{h = 0\}$. Ist andererseits h(x,y) = 0, so folgt für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein $(x,y-\varepsilon) \in U \times I$ und

$$h(x, y - \varepsilon) = h(x, y) - \varepsilon < 0.$$

Dies zeigt $(x,y) \in \overline{\Omega}$, und wegen $(x,y) \notin \Omega$ folgt $(x,y) \in \partial \Omega \cap (U \times I)$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen, und die zweite folgt wegen $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$.

Beispiel 10.1 Der Halbraum $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty,0)$ hat C^1 -Rand, denn in Satz 10.1(3) können wir $U = \mathbb{R}^{n-1}$, $I = (-\infty,\infty)$ und $u: U \to I$, $u(x) \equiv 0$, wählen, und zwar für jeden Punkt $p \in \partial \mathbb{H}^n$. Dagegen hat $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 0\}$ keinen C^1 -Rand, obwohl der Rand $\partial \Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine (n-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Denn für eine lokale Beschreibung als Subgraph wie in Satz 10.1(3) würde mit Lemma 10.1 folgen:

$$\{(x,y)\in U\times I:y>u(x)\}=(\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega})\cap (U\times I)=\emptyset,$$

ein Widerspruch wegen I offen und $u(x) \in I$ für $x \in U$.

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von $M \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt $p \in M$, wenn es eine Abbildung $\gamma: (-\delta, \delta) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge aller Tangentialvektoren von M im Punkt p bildet einen Unterraum, den Tangentialraum T_pM , siehe Folgerung 8.1 in Analysis 2. In unserem Fall hat $M = \partial \Omega$ Kodimension Eins, und $T_p(\partial \Omega)$ ist eine Hyperebene mit genau zwei Einheitsnormalen. Wir wollen da eine Wahl treffen.

Lemma 10.2 (Definition der äußeren Normale) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1 -Rand. Dann gibt es zu $p \in \partial \Omega$ genau einen Vektor $\nu(p) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\nu(p) \perp T_p(\partial\Omega) \text{ und } |\nu(p)| = 1,$
- (2) Für |t| hinreichend klein gilt: $p + t\nu(p) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ genau wenn t > 0.

Das Vektorfeld $\nu: \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \nu(p)$, ist stetig und heißt äußere Normale von Ω .

BEWEIS: Die Eindeutigkeit von $\nu(p)$ ergibt sich aus (1) und (2). Zur Existenz wähle mit Satz 10.1(3) zu $p \in \partial\Omega$ nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten eine Darstellung $\Omega \cap (U \times I) = \{(x,y) \in U \times I : y < u(x)\}$. Wir konstruieren die äußere Normale gleich in allen Punkten $q \in \partial\Omega \cap (U \times I)$. Nach Lemma 10.1 ist die Graphenabbildung $f: U \to \mathbb{R}^n$, f(x) = (x, u(x)), eine lokale Parametrisierung von $\partial\Omega$. Der Tangentialraum $T_q(\partial\Omega)$ im Punkt q = (x, u(x)) hat die Basis

$$(e_i, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)) = \frac{d}{dt} f(x + te_i)|_{t=0}$$
 für $i = 1, \dots, n-1$.

Definiere nun auf $\partial\Omega\cap(U\times I)$ das Vektorfeld

(10.1)
$$\nu(q) = \frac{(-Du(x), 1)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \quad \text{für } q = (x, u(x)).$$

Damit erfüllt $\nu(q)$ die Bedingung (1). Nun ist $q+t\nu(q)=(x(t),y(t))$ mit

$$x(t) = x - t \frac{Du(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}}$$
 und $y(t) = u(x) + t \frac{1}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}}$.

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}(y(t) - u(x(t)))|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} + Du(x)\frac{Du(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} = \sqrt{1 + |Du(x)|^2} > 0.$$

Mit Lemma 10.1 folgt Bedingung (2). Außerdem ergibt sich aus (10.1) die Stetigkeit von ν .

Definition 10.1 ($C^1(\overline{\Omega})$ -Raum) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $C^1(\overline{\Omega})$ den Unterraum aller Funktionen $f \in C^1(\Omega)$, für die f und Df stetige Fortsetzungen auf $\overline{\Omega}$ besitzen. Es ist dabei üblich, die Fortsetzung von f wieder mit f zu bezeichnen.

Wir zeigen nun eine lokale Version des Satzes von Gauß.

Lemma 10.3 Sei $\Omega = \{(x,y) \in U \times I : y < u(x)\}$, wobei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $u \in C^1(U,I)$. Ist $X \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger in $U \times I$, so gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial \Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Beweis: Da X(x,a) = 0 für alle $x \in U$, folgt mit Fubini

(10.2)
$$\int_{\Omega} \frac{\partial X_n}{\partial y} d\mathcal{L}^n = \int_{U} \int_{a}^{u(x)} \frac{\partial X_n}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_{U} X_n(x, u(x)) dx.$$

Weiter behaupten wir für i = 1, ..., n-1

(10.3)
$$\int_{\Omega} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n = -\int_{U} X_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx.$$

Aus (10.2) und (10.3) folgt das Lemma, denn wir haben

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^{n} = -\sum_{i=1}^{n-1} \int_{U} X_{i}(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_{i}}(x) \, dx + \int_{U} X_{n}(x, u(x)) \, dx$$

$$= \int_{U} \left\langle X(x, u(x)), \frac{(-Du(x), 1)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^{2}}} \right\rangle \sqrt{1 + |Du(x)|^{2}} \, dx$$

$$= \int_{\partial \Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Folgerung 9.1 zur Berechnung des Oberflächenintegrals, Formel (9.4) für die Jacobische von Graphen und Formel (10.1) für die äußere Normale benutzt. Um Gleichung (10.3) zu verifizieren, wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $t \leq -2$ und $\eta(t) = 0$ für $t \geq -1$, und setzen $\eta_{\varepsilon}(t) = \eta(t/\varepsilon)$. Es folgt $\eta_{\varepsilon}(y - u(x)) = 0$ für $y \geq u(x) - \varepsilon$ und

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \eta_{\varepsilon} (y - u(x)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y < u(x), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit zweimaliger partieller Integration sehen wir für i = 1, ..., n-1

$$\begin{split} \int_{\Omega} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x,y) \eta_{\varepsilon}(y-u(x)) \, dx dy &= \int_{\Omega} X_i(x,y) \eta_{\varepsilon}'(y-u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx dy \\ &= -\int_{\Omega} \frac{\partial X_i}{\partial y}(x,y) \eta_{\varepsilon}(y-u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx dy. \end{split}$$

Die beteiligten Funktionen sind beschränkt, also folgt mit Lebesgue für $\varepsilon \searrow 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} d\mathcal{L}^n = -\int_{\Omega} \frac{\partial X_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dxdy$$

$$= -\int_{U} \int_{a}^{u(x)} \frac{\partial X_i}{\partial y}(x, y) dy \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx$$

$$= -\int_{U} X_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx.$$

Das ist (10.3), also ist das Lemma bewiesen.

Wir müssen schließlich das Resultat globalisieren. Das entscheidende Hilfsmittel ist dabei eine sogenannte Teilung der Eins, die nun konstruiert werden soll.

Lemma 10.4 (Teilung der Eins) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und W_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, sei eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine endliche Familie $\chi_j \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $j \in J$, so dass gilt:

- (1) $\sum_{j \in J} \chi_j(p) = 1$ für alle $p \in K$.
- (2) Für jedes $j \in J$ gibt es ein $\lambda = \lambda(j)$ mit spt $\chi_j \subset W_{\lambda}$.

Beweis: Sei $\Omega \supset K$ offen und beschränkt. Wähle zu $p \in \overline{\Omega}$ ein r(p) > 0 wie folgt:

- für $p \in K$ sei $\lambda(p) \in \Lambda$ mit $p \in W_{\lambda(p)}$. Wähle r(p) > 0 mit $\overline{B_{2r(p)}(p)} \subset W_{\lambda(p)} \cap \Omega$.
- für $p \in \overline{\Omega} \backslash K$ wähle r(p) mit $\overline{B_{2r(p)}(p)} \cap K = \emptyset$.

Seien p_j , $1 \le j \le N$, so dass $\overline{\Omega}$ durch die Kugeln $B_{r_j}(p_j)$, $r_j = r(p_j)$, überdeckt wird. Wähle $\tilde{\chi}_j \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\chi}_j \ge 0$, mit

$$\tilde{\chi}_j = \begin{cases} 1 & \text{auf } B_{r_j}(p_j) \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \backslash B_{2r_j}(p_j). \end{cases}$$

Es folgt $\sum_{j=1}^{N} \tilde{\chi}_{j} \geq 1$ auf $\overline{\Omega}$, also sind die Funktionen $\chi_{j} = \tilde{\chi}_{j} / \left(\sum_{j=1}^{N} \tilde{\chi}_{j}\right)$ in $C^{\infty}(\Omega)$. Sei nun J die Menge aller $j \in \{1, \ldots, N\}$ mit $p_{j} \in K$. Für $j \in J$ ist spt $\chi_{j} \subset \overline{B_{2r_{j}}(p_{j})} \subset W_{\lambda_{j}} \cap \Omega$ mit $\lambda_{j} = \lambda(p_{j})$. Da $\chi_{j}|_{K} = 0$ für $j \notin J$, folgt $\sum_{j \in J} \chi_{j} = \sum_{j=1}^{N} \chi_{j} = 1$ auf K.

Satz 10.2 (Integralsatz von Gauß) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1 Rand und äußerer Normale $\nu : \partial \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt für ein Vektorfeld $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial \Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.$$

Beweis: Wähle nach Satz 10.1(3) zu jedem $p \in \partial \Omega$ eine Umgebung W_p , in der Ω bezüglich geeigneter Koordinaten als Subgraph dargestellt ist. Für $p \in \Omega$ setze einfach $W_p = \Omega$. Die

Mengen W_p bilden eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$. Wähle mit Lemma 10.4 eine untergeordnete Teilung der Eins $\chi_1, \ldots, \chi_N \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Liegt spt χ_j in einer Randumgebung $W_p = U \times I$ wie in 10.1(3), so folgt aus Lemma 10.3

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (\chi_j X) \, dx = \int_{\partial \Omega} \langle \chi_j X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Ist spt $\chi_i \subset W_p = \Omega$, so folgt einfach mit partieller Integration, Satz 7.3,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (\chi_j X) \, dx = 0 = \int_{\partial \Omega} \langle \chi_j X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Durch Addition erhalten wir wie gewünscht

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\chi_{j} X \right) dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial \Omega} \langle \chi_{j} X, \nu \rangle \, d\mu = \int_{\partial \Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mu.$$

Der Satz von Gauß wird oft für Gebiete benötigt, die nicht C^1 -Rand haben, zum Beispiel Polyeder. Der gegebene Beweis kann auf Gebiete ausgedehnt werden, deren Rand lokal ein Lipschitzgraph ist§.

Beispiel 10.2 Wählen wir im Satz von Gauß als Vektorfeld X(x) = x, so folgt

$$\mathcal{L}^{n}(\Omega) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{L}^{n} = \frac{1}{n} \int_{\partial \Omega} \langle x, \nu(x) \rangle \, d\mu(x).$$

Insbesondere ergibt sich wieder $\alpha_n = \omega_{n-1}/n$, vergleiche Beispiel 9.5.

Folgerung 10.1 (Greensche Formeln) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Dann gilt für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \langle Du, Dv \rangle) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\mu.$$

Weiter folgt für $u.v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\mu.$$

BEWEIS: Die erste Aussage folgt aus dem Satz von Gauß wegen div $(uDv) = \langle Du, Dv \rangle + u\Delta v$. Die zweite Aussage ergibt sich aus der ersten durch Vertauschen von u und v.

[§]siehe H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis.

Beispiel 10.3 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen) Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion, das heißt $\Delta u = 0$ auf Ω . Aus dem Satz von Gauß folgt dann für $x_0 \in \Omega$ und $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial \Omega)$

$$\int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mu = \int_{B_r(x_0)} \Delta u \, dx = 0.$$

Betrachte weiter die auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ harmonische Funktion $v(x) = \gamma(|x - x_0|)$ mit

$$\gamma(\varrho) = \begin{cases} \frac{\varrho^{2-n}}{2-n} & \text{für } n \ge 3, \\ \log \varrho & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Aus der zweiten Greenschen Formel folgt wegen $\gamma'(\varrho) = \varrho^{1-n}$

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mu = \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \, d\mu.$$

Nun gilt aber für $\varepsilon \searrow 0$

$$\left| \frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x_0)} u(x) d\mu(x) - u(x_0) \right| = \left| \frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x_0)} \left(u(x) - u(x_0) \right) d\mu(x) \right|$$

$$\leq \sup_{|x-x_0|=\varepsilon} |u(x) - u(x_0)| \to 0.$$

Dies beweist die sphärische Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen:

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\mu(x) \quad \text{für } 0 < r < \text{dist}(x_0, \partial \Omega).$$

Mit Satz 9.7 folgt auch die Mittelwertformel auf Kugeln:

$$\frac{1}{\alpha_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_0^r \int_{\partial B_\varrho(x_0)} u(x) d\mu_\varrho(x) d\varrho$$
$$= \frac{u(x_0)}{\alpha_n r^n} \int_0^r \omega_{n-1} \varrho^{n-1} d\varrho$$
$$= u(x_0).$$

Beispiel 10.4 (Strömungen) Sei $v \in C^1(G \times (a,b), \mathbb{R}^n)$, v = v(x,t), ein Vektorfeld auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, das eventuell auch von der Zeit abhängt. Für $x \in G$ bezeichne mit $\phi^x : (a_x, b_x) \to G$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\phi^x}{dt}(t) = v(\phi^x(t), t)$$
 und $\phi^x(0) = x$.

Anschaulich interpretieren wir v als Geschwindigkeitsfeld einer Strömung und $\phi^x(t)$ als Bahnkurve eines Partikels, das zur Zeit t=0 an der Stelle x ist. Zusammenfassen aller Bahnkurven ergibt eine C^1 -Abbildung, den Fluss von v,

$$\phi : \{(x,t) \in G \times (a,b) : a_x < t < b_x\} \to G, \ \phi(x,t) = \phi^x(t).$$

Die Mengen $G_t = \{x \in G : t \in (a_x, b_x)\}$ sind offen, und die Abbildungen $\phi_t : G_t \to G_{-t}$, $\phi_t(x) = \phi(x, t)$, sind Diffeomorphismen mit

$$\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$$
 auf $G_t \cap G_{s+t}$.

Zur Zeit t=0 gilt $\frac{\partial}{\partial t}(D_x\phi)=D_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=D_xv$, insbesondere wegen $D_x\phi(x,0)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det D_x \phi)|_{t=0} = \operatorname{tr} D_x v = \operatorname{div} v.$$

Sei nun $\varrho \in C^1(G \times (a,b))$ die evtl. auch zeitabhängige Dichteverteilung der Strömung. Ist $\Omega \subset\subset G$, so gilt $\Omega \subset G_t$ für |t| hinreichend klein. Es bezeichne $m_{\Omega}(t)$ die im Gebiet $\phi_t(\Omega)$ enthaltene Masse. Mit dem Transformationssatz und Differentiation unter dem Integral folgt

$$m'_{\Omega}(0) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_{t}(\Omega)} \varrho(y,t) \, dy|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho(\phi_{t}(x),t) \, \det D_{x}\phi(x,t) \, dx|_{t=0}$$

$$= \int_{\Omega} \left(D_{x}\varrho \cdot v + \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} v \right) \, dx$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v) \right) dx.$$

Für beliebige $t \in (a, b)$ mit $\Omega \subset\subset G_t$ ergibt sich aus dem Fall t = 0

$$m_{\Omega}'(t) = \frac{d}{ds} \int_{\phi_s(\phi_t(\Omega))} \varrho(y, s+t) \, dy|_{s=0} = \int_{\phi_t(\Omega)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v) \right) dx.$$

Gilt daher auf $G \times (a, b)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v) = 0,$$

so ist die Funktion $m_{\Omega}(t)$ für alle $\Omega \subset G$ zeitlich konstant. Wählen wir $\varrho \equiv 1$, so ist $m_{\Omega}(t)$ das Volumen von $\phi_t(\Omega)$, und der Satz von Gauß impliziert

$$m'_{\Omega}(0) = \int_{\partial\Omega} \langle v, \nu \rangle d\mu.$$

Das Flächenelement $d\mu$ trägt mit der Normalkomponente $\langle v, \nu \rangle$ zur Änderung des eingeschlossenen Volumens bei, was eine sehr anschauliche Deutung des Gaußschen Satzes ist.

Beispiel 10.5 (Integralsatz von Cauchy) Sei $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand. Die Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, f = u + iv, sei holomorph, das heißt es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
 und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Sei $\gamma:[0,L]\to\partial\Omega$ die Parametrisierung einer Komponente von $\partial\Omega$ nach der Bogenlänge, so dass Ω links von γ liegt, das heißt die äußere Normale längs $\gamma(s)=\big(x(s),y(s)\big)$ ist $\nu(s)=\big(y'(s),-x'(s)\big)$. Aus der Definition des komplexen Kurvenintegrals folgt

$$\int_{\gamma} f \, dz = \int_{0}^{L} (ux' - vy') \, ds + i \int_{0}^{L} (uy' + vx') \, ds
= \int_{0}^{L} \langle (-v, -u), (y', -x') \rangle \, ds + i \int_{0}^{L} \langle (u, -v), (y', -x') \rangle \, ds.$$

Also impliziert der Satz von Gauß

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \int_{\Omega} \operatorname{div} (-v, -u) dx dy + i \int_{\Omega} \operatorname{div} (u, -v) dx dy$$

$$= -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= 0.$$

11 Faltung und Fouriertransformation

Es werden die Faltung und die Fouriertransformation für Funktionen im \mathbb{R}^n als Anwendungen der Integrationstheorie behandelt. Die Faltung ordnet zwei gegebenen Funktionen eine dritte Funktion durch gewichtete Mittelung zu. Dieses Verfahren kann unter anderem dazu benutzt werden, gegebene Funktionen zu glätten. Die zentrale Aussage zur Fouriertransformation ist der Satz von Plancherel, der die Rückberechnung einer Funktion aus ihrer Fouriertransformierten erlaubt. Als Anwendung berechnen wir die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu gegebenen Anfangsdaten im \mathbb{R}^n , und diskutieren das entsprechende Problem für die Wellengleichung.

In diesem Kapitel haben wir es ausschließlich mit dem n-dimensionalen Lebesguemaß zu tun, und wir schreiben statt $d\mathcal{L}^n(x)$ stets einfach dx.

Satz 11.1 (Definition der Faltung) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung von f mit g ist die \mathcal{L}^n -fast-überall definierte Funktion

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy.$$

Es gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sowie $||f * g||_{L^p} \le ||f||_{L^p} ||g||_{L^1}$.

BEWEIS: Die Funktion $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, F(x,y) = f(x-y)g(y) ist messbar bezüglich $\mathcal{L}^{2n} = \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^n$. Denn $f_0(x,y) = f(x)$ und $g_0(x,y) = g(y)$ sind \mathcal{L}^{2n} -messbar, und wegen $f(x-y) = (f_0 \circ T)(x,y)$ mit T(x,y) = (x-y,y) ist $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ ebenfalls \mathcal{L}^{2n} -messbar nach Satz 8.1. Wir zeigen die Behauptung nun zunächst für $f,g \geq 0$. Nach dem Satz von Fubini, Satz 7.2, ist die Funktion $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) \, dy$ messbar, und mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$||f * g||_{L^{p}}^{p} = \int_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} f(x - y) g(y)^{\frac{1}{p}} g(y)^{\frac{p-1}{p}} dy \right)^{p} dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} f(x - y)^{p} g(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} g(y) dy \right)^{p-1} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} f(x - y)^{p} dx \right) g(y) dy \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} g(y) dy \right)^{p-1}$$

$$= ||f||_{L^{p}}^{p} ||g||_{L^{1}}^{p} < \infty.$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ beliebig folgt durch Zerlegung in f^{\pm} bzw. g^{\pm} , dass die Funktion f * g für \mathcal{L}^n -fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und endlich ist, sowie \mathcal{L}^n -messbar. Der Satz ergibt sich nun aus der Abschätzung

$$||f * g||_{L^p}^p \le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| |g(y)| dy \right)^p dx \le ||f||_{L^p}^p ||g||_{L^1}^p.$$

Die Faltung ist kommutativ, denn mit der Substitution x - y = z folgt

(11.1)
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{D}_n} f(x - y)g(y) \, dy = \int_{\mathbb{D}_n} f(z)g(x - z) \, dz = (g * f)(x).$$

Lemma 11.1 Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, und $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) $f \circ \tau_h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $||f \circ \tau_h||_{L^p} = ||f||_{L^p}$.
- (ii) $f \circ \tau_h \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $h \to 0$, falls $p < \infty$.

BEWEIS: Aussage (i) ist trivial. Wir zeigen (ii) zunächst unter der Annahme $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\operatorname{osc}(f, \delta) := \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)| \searrow 0$ für $\delta \searrow 0$, folglich

$$||f \circ \tau_h - f||_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| \le \operatorname{osc}(f, |h|) \to 0 \quad \text{mit } h \to 0$$

Wähle R > 0 mit spt $f \subset B_R(0)$. Dann gilt spt $(f \circ \tau_h) \subset B_{R+|h|}(0)$, also für |h| < 1

$$||f \circ \tau_h - f||_{L^p} \le ||f \circ \tau_h - f||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}^n(B_{R+1}(0))^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{mit } h \to 0.$$

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach Satz 6.4 ist $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $f_{\varepsilon} \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $||f - f_{\varepsilon}||_{L^p} < \varepsilon/2$, und es folgt mit Aussage (i)

$$||f \circ \tau_h - f||_{L^p} \le ||(f - f_{\varepsilon}) \circ \tau_h||_{L^p} + ||f_{\varepsilon} \circ \tau_h - f_{\varepsilon}||_{L^p} + ||f_{\varepsilon} - f||_{L^p} < ||f_{\varepsilon} \circ \tau_h - f_{\varepsilon}||_{L^p} + \varepsilon.$$

Somit gilt $\limsup_{h\to 0} \|f\circ\tau_h - f\|_{L^p} \le \varepsilon$, und Behauptung (ii) folgt mit $\varepsilon \searrow 0$.

Satz 11.2 (Approximation durch Faltung) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$. Ist $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) dz = 1$, so folgt für $\eta_{\varrho}(x) = \varrho^{-n} \eta(x/\varrho)$

$$||f * \eta_{\varrho}||_{L^{p}} \le ||f||_{L^{p}} ||\eta||_{L^{1}} \quad und \quad f * \eta_{\varrho} \to f \text{ in } L^{p}(\mathbb{R}^{n}).$$

BEWEIS: Durch Substitution sieht man $\|\eta_{\varrho}\|_{L^{1}} = \|\eta\|_{L^{1}}$, daher gilt $f * \eta_{\varrho} \in L^{p}(\mathbb{R}^{n})$ und $\|f * \eta_{\varrho}\|_{L^{p}} \leq \|f\|_{L^{p}} \|\eta\|_{L^{1}}$ nach Satz 11.1. Weiter folgt mit der Substitution $y = \varrho z$

$$(f * \eta_{\varrho})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \eta_{\varrho}(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varrho z) \eta(z) \, dz.$$

Wir schaetzen mit der Hoelderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini wie folgt ab:

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} |(f * \eta_{\varrho})(x) - f(x)|^{p} dx = \int_{\mathbb{R}^{n}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n}} \left(f(x - \varrho z) - f(x) \right) \eta(z) dz \right|^{p} dx \\
\leq \int_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} |f(x - \varrho z) - f(x)| |\eta(z)|^{\frac{1}{p}} |\eta(z)|^{\frac{p-1}{p}} dz \right)^{p} dx \\
\leq \|\eta\|_{L^{1}}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} |f(x - \varrho z) - f(x)|^{p} |\eta(z)| dz dx \\
= \|\eta\|_{L^{1}}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n}} |\eta(z)| \int_{\mathbb{R}^{n}} |f(x - \varrho z) - f(x)|^{p} dx dz \\
= \|\eta\|_{L^{1}}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n}} |\eta(z)| \|f \circ \tau_{-\varrho z} - f\|_{L^{p}}^{p} dz.$$

Im letzten Integral geht der Integrand punktweise gegen Null mit $\rho \to 0$ nach Lemma 11.1(ii). Außerdem gilt die Abschätzung

$$\|\eta(z)\| \|f \circ \tau_{-\varrho z} - f\|_{L^p}^p \le 2^p \|f\|_{L^p}^p \|\eta(z)\| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Also konvergiert das Integral gegen Null nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. \square Die Approximation ist besonders nützlich, wenn die Funktion η glatt gewählt wird. Wir erinnern an die Multiindexnotation für Ableitungen von Funktionen im \mathbb{R}^n , und zwar setzt man für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$
 und $D^{\alpha} = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$.

Satz 11.3 (Glättung) Sei $\eta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit $||D^{\alpha}\eta||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_k$ für $|\alpha| \leq k$. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist dann $f * \eta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$D^{\alpha}(f * \eta) = f * (D^{\alpha}\eta), \text{ insbesondere } ||D^{\alpha}(f * \eta)||_{C^{0}(\mathbb{R}^{n})} \leq C_{k} ||f||_{L^{1}}.$$

Beweis: Nach der Substitution y = x - z haben wir

$$(f * \eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x, z) dz \quad \text{mit } F(x, z) = f(z)\eta(x - z).$$

Im Fall k=0 gilt $F(x,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$, die Funktion $F(\cdot,z)$ ist stetig für \mathcal{L}^n -fast-alle $z\in\mathbb{R}^n$ und wir haben die Abschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |F(x,z)| \le C_0 |f(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $\eta * f$ stetig nach Satz 5.5 und es gilt $||f * \eta||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le C_0 ||f||_{L^1}$. Im Fall k = 1 gilt $F(\cdot, z) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ für \mathcal{L}^n -fast-alle $z \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, z) \right| \le C_1 |f(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Aus Folgerung 5.1 folgt $f * \eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_j(f*\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\partial_j \eta(x-z) \, dz = f*(\partial_j \eta)(z),$$

insbesondere gilt die Abschätzung $\|\partial j(f*\eta)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|f\|_{L^1}$. Die Aussage für eine Ableitung D^{α} mit Ordnung $|\alpha| \leq k$ ergibt sich in offensichtlicher Weise durch Induktion. \square Wir können jetzt das Dichteresultat aus Satz 6.4 verschärfen.

Satz 11.4 (Dichtheit von $C_c^{\infty}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_c^{\infty}(\Omega)$ mit $||f - f_k||_{L^p(\Omega)} \to 0$.

BEWEIS: Wegen Satz 6.4 können wir $f \in C_c^0(\Omega)$ annehmen. Wähle $\eta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, $\int \eta(z) dz = 1$ und spt $\eta \subset \overline{B_1(0)}$. Mit $\eta_{\varrho}(x) = \varrho^{-n} \eta(\frac{x}{\varrho})$ gilt dann $f * \eta_{\varrho} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 11.3 und $f * \eta_{\varrho} \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 11.2. Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ mit dist $(x, \operatorname{spt} f) > \varrho$

$$(f * \eta_{\varrho})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \eta_{\varrho}(y) \, dy = 0,$$

denn für $|y| \ge \varrho$ ist $\eta_{\varrho}(y) = \varrho^{-n} \eta(y/\varrho) = 0$ und für $|y| \le \varrho$ ist f(x-y) = 0. Also folgt

(11.2)
$$\operatorname{spt}(f * \eta_{\varrho}) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} f) \leq \varrho\},\$$

das heißt $f * \eta_{\varrho} \in C_c^{\infty}(\Omega)$ für $\varrho > 0$ hinreichend klein, womit der Satz bewiesen ist. \square Das folgende Ergebnis verallgemeinert Lemma 8.4. Es ist dabei sinnvoll, die Aussage mit lokal integrierbaren Funktionen zu formulieren.

Definition 11.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Die messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ liegt in $L^p_{loc}(\Omega)$, falls $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ ist für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$.

Satz 11.5 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für die Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gelte

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \ge 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \text{ mit } \varphi \ge 0.$$

Dann folgt $f(x) \geq 0$ für \mathcal{L}^n -fast-alle $x \in \Omega$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass $E = \{x \in \Omega : f(x) < 0\}$ eine Nullmenge ist. Nach Satz ?? gilt

$$\mathcal{L}^n(E) = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : K \subset E \text{ kompakt} \}.$$

Sei $K \subset E$ kompakt und $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, spt $\eta \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int \eta(z) dz = 1$. Dann ist $\eta_{\varrho} * \chi_K \in C_c^{\infty}(\Omega)$ für $\varrho < \operatorname{dist}(K, \partial \Omega)$. Da $\eta_{\varrho} * \chi_K \geq 0$, ist nach Voraussetzung

$$\int_{\Omega} f(x)\eta_{\varrho} * \chi_K(x) \, dx \ge 0.$$

Aber $\eta_{\varrho} * \chi_K \to \chi_K$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, also punktweise fast-überall für eine Teilfolge $\varrho_i \searrow 0$ nach Folgerung 6.1. Wegen $\eta_{\varrho} * \chi_K \leq 1$ liefert der Konvergenzsatz von Lebesgue

$$0 \le \lim_{i \to \infty} \int f(x) (\eta_{\varrho_i} * \chi_K)(x) \, dx = \int f(x) \chi_K(x) \, dx.$$

Aber f < 0 auf K, also $\mathcal{L}^n(K) = 0$ nach Folgerung 4.3 und damit $\mathcal{L}^n(E) = 0$.

Faltungen mit singulären Integralkernen spielen bei partiellen Differentialgleichungen eine große Rolle. Ein prominentes Beispiel ist das Newtonpotential.

Beispiel 11.1 (Newtonpotential) Sei $G \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Für eine Funktion $f \in L^{\infty}(\Omega)$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, betrachten wir die Faltung

$$u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ u(x) = \int_{\Omega} G(x - y) f(y) \, dy.$$

Es ist u = G * f, wobei f durch Null auf \mathbb{R}^n fortgesetzt wird. Es gelte zunächst

(11.3)
$$|G(z)| \le C|z|^{-p}$$
 für ein $p < n$,

das heißt u(x) ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert nach Beispiel 4.5. Um zu zeigen, dass u stetig ist, wählen wir $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(z) = 0$ für $|z| \le 1/2$, $\varphi(z) = 1$ für $|z| \ge 1$ und $|D^k \varphi| \le C_k$, und definieren den abgeschnittenen Kern

$$G_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon}G \quad \text{mit } \varphi_{\varepsilon}(z) = \varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right).$$

Aus (11.3) folgt die Abschätzung

$$(11.4) |G(z) - G_{\varepsilon}(z)| \le C\chi_{B_{\varepsilon}(0)}|z|^{-p}.$$

Die Funktion $u_{\varepsilon}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} G_{\varepsilon}(x-y) f(y) dy$, ist glatt, und es folgt

$$|u(x) - u_{\varepsilon}(x)| \le C \int_{B_{\varepsilon}(x)} |x - y|^{-p} |f(y)| \, dy \le \frac{C}{n - p} \, ||f||_{L^{\infty}} \, \varepsilon^{n - p} \to 0.$$

Somit ist u stetig als gleichmäßiger Grenzwert der u_{ε} . Nun gelte zusätzlich

(11.5)
$$|DG(z)| \le C|z|^{-p-1}$$
 für ein $p < n-1$.

Dann folgt wegen $(D\varphi_{\varepsilon})(z) = \frac{1}{\varepsilon}D\varphi(\frac{z}{\varepsilon})$

$$(11.6) |DG(z) - DG_{\varepsilon}(z)| \le C\chi_{B_{\varepsilon}(0)} \left(|z|^{-p-1} + \frac{1}{\varepsilon} |z|^{-p} \right) \le C\chi_{B_{\varepsilon}(0)} |z|^{-p-1}.$$

Mit $v_j(x) = \int_{\Omega} (\partial_j G)(x-y) f(y) dy$ ergibt sich

$$|v_{j}(x) - \partial_{j}u_{\varepsilon}(x)| \leq \int_{\Omega} |(\partial_{j}G)(x - y) - (\partial_{j}G_{\varepsilon})(x - y)| |f(y)| dy$$

$$\leq \frac{C}{n - p - 1} ||f||_{L^{\infty}} \varepsilon^{n - p - 1} \to 0.$$

Also konvergiert $\partial_j u_{\varepsilon}$ gleichmäßig auf \mathbb{R}^n gegen v_j , und es folgt $\partial_j u = v_j \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Wir spezialisieren jetzt auf das Newtonpotential

$$G(z) = \begin{cases} \frac{|z|^{2-n}}{(2-n)\omega_{n-1}} & \text{für } n \ge 3, \\ \frac{1}{2\pi} \log|z| & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Im Fall $n \ge 3$ sind (11.3) und (11.5) mit p = n - 2 erfüllt, im Fall n = 2 gilt (11.3) für jedes p > 0 und (11.5) für p = 0. Somit ist das Newtonpotential von f in $C^1(\mathbb{R}^n)$, und

$$\partial_j u(x) = \int_{\Omega} H(x - y) f(y) dy$$
 mit $H(z) = \partial_j G(z) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{z_j}{|z|^n}$.

Auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ kann weiter unter dem Integral differenziert werden, also ist u auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ glatt und

$$\Delta u(x) = \int_{\Omega} (\Delta G)(x - y) f(y) dy = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}.$$

Im Innern von Ω kann aber wegen der Singularität so nicht argumentiert werden. Das Ergebnis wäre sogar falsch, denn u ist nicht harmonisch auf Ω , sondern löst dort die Poissongleichung $\Delta u = f$, was wir nun zeigen wollen. Wie oben approximieren wir $\partial_j u = v_j$ durch

$$v_{j,\varepsilon}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ v_{j,\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x-y) f(y) \, dy, \quad \text{ wobei } H_{\varepsilon} = \varphi_{\varepsilon} H.$$

Da (11.3) für H mit p = n - 1 erfüllt ist, konvergiert $v_{j,\varepsilon}$ gleichmäßig auf \mathbb{R}^n gegen $v_j = \partial_j u$. Das Problem ist nun, dass die Ungleichung in (11.5) nur mit p = n - 1 richtig ist, das heißt wir haben nur die Abschätzung

$$(11.7) |DH(z) - DH_{\varepsilon}(z)| \le C\chi_{B_{\varepsilon}(0)}\left(|z|^{-n} + \frac{1}{\varepsilon}|z|^{1-n}\right) \le C\chi_{B_{\varepsilon}(0)}|z|^{-n}.$$

Um die fehlende Integrierbarkeit zu kompensieren, setzen wir zusätzlich voraus, dass f Hölderstetig mit einem Exponenten $\alpha \in (0,1]$ ist, also

(11.8)
$$[f]_{\alpha} := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, so dass $\Omega \subset U$, und $x \in \Omega$. Dann gilt, wobei im letzten Schritt der Satz von Gauß auf das Vektorfeld $y \mapsto H_{\varepsilon}(x-y)e_i$ angewandt wird,

$$\partial_{i}v_{j,\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} (\partial_{i}H_{\varepsilon})(x-y) f(y) dy$$

$$= \int_{U} (\partial_{i}H_{\varepsilon})(x-y) (f(y)-f(x)) dy + f(x) \int_{U} (\partial_{i}H_{\varepsilon})(x-y) dy$$

$$= \int_{U} (\partial_{i}H_{\varepsilon})(x-y) (f(y)-f(x)) dy - f(x) \int_{\partial U} H_{\varepsilon}(x-y) \langle \nu(y), e_{i} \rangle d\mu(y).$$

Nun ist $H = \partial_j G$, und $H_{\varepsilon}(x - y) = \partial_j G(x - y)$ für $y \in \partial U$ und $\varepsilon > 0$ klein. Setze

$$w_{ij}(x) = \int_{U} (\partial_{ij}^{2} G)(x - y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial U} (\partial_{j} G)(x - y) \langle \nu(y), e_{i} \rangle d\mu(y).$$

Die $\partial_i v_{j,\varepsilon}$ konvergieren gleichmäßig auf Ω gegen w_{ij} , denn aus (11.7) und (11.8) folgt

$$|w_{ij}(x) - \partial_i v_{j,\varepsilon}(x)| \leq \int_U |\partial_i H(x - y) - \partial_i H_{\varepsilon}(x - y)| |f(y) - f(x)| dy$$

$$\leq \frac{C}{\alpha} [f]_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \to 0.$$

Somit gilt $\partial_{ij}^2 u = w_{ij} \in C^0(\Omega)$. Insbesondere folgt, da $\Delta G = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\Delta u(x) = -f(x) \int_{\partial U} \langle DG(x-y), \nu(y) \rangle d\mu(y)$$

$$= -f(x) \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} \langle DG(x-y), \nu(y) \rangle d\mu(y)$$

$$= f(x).$$

Damit ist die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in Ω verifiziert. Es gibt stetige Funktionen f, für die keine zweimal differenzierbare Lösung der Gleichung $\Delta u = f$ existiert, die Voraussetzung der Hölderstetigkeit ist also nicht überflüssig.

Wir kommen zum Abschluss der Vorlesung zur Fourierintegraldarstellung, die wir zuerst heuristisch als kontinuierlichen Grenzwert der Entwicklung in eine Fourierreihe herleiten. Sei $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ und N > 0 so groß, dass spt $f \subset (-N\pi, N\pi)$. Die normierten Basisfunktionen mit Periode $2\pi N$ lauten

$$w_k^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{i\frac{k}{N}x} \quad \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Nach Satz ?? wird die Funktion f auf $(-N\pi, N\pi)$ durch ihre Fourierreihe dargestellt, das heißt für jedes $x \in (-N\pi, N\pi)$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi N} e^{i\frac{k}{N}x} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\frac{k}{N}y} dy =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N},$$

wobei

$$F(p) = \frac{1}{2\pi} e^{ipx} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ipy} \, dy.$$

Falls nun F(p) für $p \to \pm \infty$ hinreichend schnell gegen Null geht, sollte die Riemannsche Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N}$ für $N \to \infty$ gegen das Integral $\int_{\mathbb{R}} F(p) \, dp$ konvergieren. Dies motiviert für $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx} dp$$
 mit $\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-ipy} dy$.

Der geschilderte Ansatz kann zu einem vollen Beweis ausgebaut werden, wir gehen aber anders vor. Alle im Folgenden auftretenden Funktionen sind C-wertig.

Definition 11.2 Die Fouriertransformierte von $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist die Funktion

$$\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle p, x \rangle} dx.$$

Die inverse Fouriertransformierte von $g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist

$$\check{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(p) e^{i\langle p, x \rangle} dp.$$

Bevor wir die Frage angehen, inwiefern diese beiden Transformationen invers sind, notieren wir einige Grundeigenschaften.

Satz 11.6 (Fouriertransformation auf L^1) $F\ddot{u}r f, g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ gilt:

- (1) $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ und $\|\hat{f}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}$.
- (2) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} \hat{g}$.
- (3) $\langle \hat{f}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \check{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$

BEWEIS: Für $F(p,x)=f(x)e^{-i\langle p,x\rangle}$ ist $F(p,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ für alle $p\in\mathbb{R}^n$ sowie $F(\cdot,x)\in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ für \mathcal{L}^n -fast-alle $x\in\mathbb{R}^n$, und es gilt

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} |F(x,p)| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Also folgt die Stetigkeit von \hat{f} aus der entsprechenden Aussage für Parameterintegrale, Satz 5.5. Die Abschätzung in (1) ist offensichtlich. Für (2) berechnen wir mit Fubini

$$\widehat{f * g}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \, dy \, e^{-i\langle p, x \rangle} \, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle p, y \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-i\langle p, x - y \rangle} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle p, y \rangle} \widehat{g}(p) \, dy$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}(p)\widehat{g}(p).$$

Auch (3) folgt aus dem Satz von Fubini, und zwar gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \hat{f}(p)\overline{g(p)} dp = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x)e^{-i\langle p, x \rangle} dx \, \overline{g(p)} dp$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x) \, \overline{\int_{\mathbb{R}^{n}} g(p)e^{i\langle p, x \rangle} dp} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x)\overline{\check{g}(x)} dx.$$

Wir berechnen nun zwei Beispiele – das erste werden wir im Beweis von Satz 11.7 verwenden.

Beispiel 11.2 Für die Gaußfunktion

$$G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ G(x) = e^{-|x|^2/2}$$

gilt $\hat{G} = G = \check{G}$. Um dies zunächst für n = 1 zu zeigen, berechnen wir mit Differentiation unter dem Integral und partieller Integration

$$\frac{d}{dp} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{2}/2} e^{-ixp} dx = \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-x^{2}/2} e^{-ixp} dx
= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} e^{-x^{2}/2} \right) i e^{-ixp} dx
= (-p) \int_{\mathbb{R}} e^{-x^{2}/2} e^{-ixp} dx,$$

das heißt $\left(e^{p^2/2}\hat{G}(p)\right)'\equiv 0$. Aber nach Beispiel 8.2 gilt

$$\hat{G}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

also folgt $\hat{G} = G$. Für n beliebig folgt mit Fubini für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ induktiv

$$\hat{G}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|x'|^2/2 - i\langle x', p' \rangle} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x_n)^2/2 - ix_n p_n} dx_n dx' = e^{-|p'|^2/2} e^{-(p_n)^2/2} = G(p).$$

Schließlich ergibt sich $\check{G}(x) = \hat{G}(-x) = G(x)$ wie behauptet.

Beispiel 11.3 Für a > 0 gilt

$$\widehat{\chi_{[-a,a]}}(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(pa)}{p} & \text{für } p \neq 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} a & \text{für } p = 0. \end{cases}$$

Das zweite Beispiel zeigt, dass die Fouriertransformierte einer L^1 -Funktion im allgemeinen nicht wieder in L^1 liegt. Aufgrund dieser Asymmetrie kann das Problem der Fourierintegraldarstellung im L^1 -Kontext nicht befriedigend behandelt werden. Der richtige Raum ist $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, denn bezüglich der L^2 -Norm ist die Fouriertransformation sogar isometrisch.

Satz 11.7 (Plancherel) Für $f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ gilt $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

BEWEIS: Es reicht die Aussage für \hat{f} zu beweisen, da $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$. Sei $G(z) = e^{-|z|^2/2}$ und $G_{\varrho}(z) = \varrho^{-n}G\left(\frac{z}{\varrho}\right)$ für $\varrho > 0$. Dann folgt aus Beispiel 11.2

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} G(\varrho p) e^{-i\langle p, z \rangle} \, dp = \frac{\varrho^{-n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} G(q) e^{-i\langle q, \frac{z}{\varrho} \rangle} \, dq = \varrho^{-n} \, \hat{G}\left(\frac{z}{\varrho}\right) = G_{\varrho}(z).$$

Da $G(\varrho p) \nearrow 1$ für $\varrho \searrow 0$, gilt mit monotoner Konvergenz und Fubini

$$\begin{split} \|\hat{f}\|_{L^{2}}^{2} &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n}} |\hat{f}(p)|^{2} G(\varrho p) \, dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n}} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x) \overline{f(y)} e^{-i\langle p, x - y \rangle} dy \, dx \, G(\varrho p) \, dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n}} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} G(\varrho p) e^{-i\langle p, x - y \rangle} \, dp \, f(x) \overline{f(y)} \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x) \overline{f(y)} G_{\varrho}(x - y) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x) (\overline{f} * G_{\varrho})(x) \, dx. \end{split}$$

Aus Beispiel 8.2 folgt mit Fubini $\int_{\mathbb{R}^n} G(z) dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$. Aber nach Satz 11.2 konvergiert dann $(2\pi)^{-n/2} \overline{f} * G_{\varrho}$ gegen \overline{f} in $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, und es folgt $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Der Satz von Plancherel erlaubt es, die Fouriertransformation auf den Raum $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ fortzusetzen, obwohl das in der Definition gegebene Integral nicht notwendig konvergiert.

Satz 11.8 (Fouriertransformation auf L^2) Es gibt eindeutig bestimmte Abbildungen $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften:

(1)
$$\mathcal{F}f = \hat{f} \text{ und } \mathcal{F}^*f = \check{f} \text{ für alle } f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}),$$

(2)
$$\|\mathcal{F} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}^* f\|_{L^2}$$
 für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

Weiter gelten für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ folgende Aussagen:

(3)
$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^*f, \mathcal{F}^*g \rangle_{L^2}.$$

$$(4) \langle \mathcal{F}f, g \rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{F}^*g \rangle_{L^2}.$$

(5)
$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
.

BEWEIS: Der Raum $(L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, denn für $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ist $\chi_{B_R(0)} f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ nach Cauchy-Schwarz, und es gilt $\chi_{B_R(0)} f \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ mit $R \to \infty$. Die Eindeutigkeit und Existenz der Abbildungen \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}^* mit (1) und (2) folgt damit leicht aus Satz 11.7. In dem komplexen Skalarproduktraum $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ gilt die Polarisationsformel

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{4} \left(\|f + g\|_{L^2}^2 - \|f - g\|_{L^2}^2 + i\|f + ig\|_{L^2}^2 - i\|f - ig\|_{L^2}^2 \right).$$

Also folgt (3) aus (2). Da in (4) beide Seiten stetig bzgl. der L^2 -Norm sind, folgt die Aussage aus Satz 11.6(3) durch Approximation. Schließlich ergibt sich aus (4) und (3)

$$\langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} f, g \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2},$$

also $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$. Die Gleichung $\mathcal{F}\mathcal{F}^*f = f$ folgt analog.

Im folgenden schreiben wir \hat{f} bzw. \check{g} auch dann, wenn f,g nur in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegen. Die Fouriertransformation spielt eine wichtige Rolle in der Theorie linearer partieller Differentialgleichungen. Dies basiert vor allem darauf, dass Ableitungsoperatoren in Multiplikationsoperatoren transformiert werden. Es ist oft praktisch, dabei im sogenannten Raum der schnell fallenden Funktionen oder Schwartz-Raum zu operieren:

(11.9)
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) = \{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : x^{\alpha} D^{\beta} f \text{ ist beschränkt für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \}$$

Wie üblich ist hier $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ und $D^{\beta} = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n}$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ gilt

$$|f(x)| \le C_N (1+|x|^2)^{-N/2}$$
 für jedes $N \in \mathbb{N}$,

insbesondere ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ für alle $p \in [1, \infty]$. Außerdem sind mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ auch $\partial_j f$ und $x_j f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ für $1 \leq j \leq n$. Im Gegensatz zum Raum $C_c^{\infty}(R^n; \mathbb{C})$ ist der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ invariant unter der Fouriertransformation, wie wir jetzt zeigen.

Satz 11.9 (Fouriertransformation auf $S(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$) Mit f ist auch $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und

(1)
$$\widehat{\partial_j f}(p) = i p_j \hat{f}(p)$$
 sowie $\widehat{x_j f}(p) = i \partial_j \hat{f}(p)$.

(2)
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) e^{i\langle p, x \rangle} dp$$
 für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Die Funktion \hat{f} ist beschränkt nach Satz 11.6(1). Wir berechnen mit partieller Integration, siehe Satz ??,

$$\widehat{\partial_j f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f)(x) e^{-i\langle p, x \rangle} dx = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i\langle p, x \rangle} dx = i p_j \, \widehat{f}(p).$$

Weiter folgt durch Herausziehen der Ableitung aus dem Integral

$$\widehat{x_j f}(p) = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial p_j} e^{-i\langle p, x \rangle} dx = \frac{i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial p_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle p, x \rangle} dx = i \partial_j \widehat{f}(p).$$

Insbesondere sind auch die Funktionen $p_j \hat{f}$ und $\partial_j \hat{f}$ beschränkt, wieder nach Satz 11.6(1). Durch Induktion über $|\alpha| + |\beta|$ verifiziert man leicht die allgemeine Formel

$$\widehat{D^{\alpha}x^{\beta}}f = i^{|\alpha| + |\beta|} p^{\alpha} D^{\beta} \hat{f}.$$

und erhält $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 11.8 folgt Behauptung (2) zunächst für \mathcal{L}^n -fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$, wegen der Stetigkeit beider Seiten also sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist der Satz bewiesen. \square Wir wollen zum Schluss des Kapitels noch zwei Anwendungen auf die Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten behandeln. Typischerweise wird dabei zunächst mit einem Fourieransatz eine Lösungsformel ermittelt, wobei die Eigenschaften der Fouriertransformation formal angewandt werden. In einem zweiten Schritt wird dann geprüft, unter welchen Voraussetzungen an die Daten die Formel eine gültige Lösung liefert. Dieser Punkt kann technisch anspruchsvoll sein – je nach Gleichung – und wird hier nur angedeutet.

Beispiel 11.4 Betrachte das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung im \mathbb{R}^n :

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$
 auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
 $u(\cdot, 0) = f$ auf \mathbb{R}^n .

Wir bilden die Fouriertransformierte $\hat{u}(\cdot,t) = \widehat{u(\cdot,t)}$ bezüglich der räumlichen Variablen. Mit Satz 11.9 erhalten wir für \hat{u} das Anfangswertproblem

$$0 = \widehat{\partial_t u} - \widehat{\Delta u} = \partial_t \hat{u} + |p|^2 \hat{u} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$
$$\hat{f} = \hat{u}(0, \cdot) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.$$

Es folgt $\hat{u}(p,t) = \hat{f}(p) e^{-t|p|^2}$. Aber nach Beispiel 11.2 gilt für $G_{\sqrt{2t}}(x) = (2t)^{-\frac{n}{2}} G\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$

$$\widehat{G_{\sqrt{2t}}}(p) = \widehat{G}(\sqrt{2t} \, p) = G(\sqrt{2t} \, p) = e^{-t|p|^2}.$$

Aus Satz 11.6(2) folgt nun $u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f * G_{\sqrt{2t}}$, das heißt

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, dy.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Formel für beschränkte und stetige Anfangsdaten f eine Lösung $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ des Anfangswertproblems liefert.

Beispiel 11.5 Als zweites betrachten wir das Anfangswertproblem für die Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

$$u(\cdot, 0) = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n,$$

$$\partial_t u(\cdot, 0) = g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.$$

Wir führen den analogen Fourieransatz durch und erhalten das Anfangswertproblem

$$0 = \widehat{\partial_t^2 u} - \widehat{\Delta u} = \partial_t^2 \widehat{u} + |p|^2 \widehat{u} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$
$$\widehat{f} = \widehat{u}(0, \cdot) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n,$$
$$\widehat{g} = \partial_t \widehat{u}(0, \cdot).$$

Es folgt diesmal für die Fouriertransformierte

$$\hat{u}(p,t) = \hat{f}(p) \cos t|p| + \hat{g}(p) \frac{\sin t|p|}{|p|}.$$

Angenommen, es gibt eine Funktion $R: \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\hat{R} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\sin(t|p|)}{|p|}$. Dann liefert formale Anwendung von Satz 11.6(2)

$$\widehat{R*g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{R} \widehat{g} = \widehat{g}(p) \frac{\sin t|p|}{|p|},$$

$$\widehat{\partial_t(R*f)} = \partial_t \left(\widehat{R*f}\right) = \partial_t \left(\widehat{f}(p) \frac{\sin(t|p|)}{|p|}\right) = \widehat{f}(p) \cos(t|p|).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems wäre dann $u = \partial_t(R * f) + R * g$. Für n = 1 können wir $R = \frac{1}{2} \chi_{[-t,t]}$ wählen nach Beispiel 11.3 und erhalten

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y) \, dy \right).$$

Dies liefert eine gültige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, falls $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$. Für n=2 behaupten wir

$$R(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\chi_{B_t(0)}}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}.$$

Denn mit Fubini folgt, zunächst für $p = (0, |p|) \neq 0$,

$$\begin{split} 2\pi \, \hat{R}(p,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\{|x| < t\}} \frac{e^{-i\langle p, x \rangle}}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} \, dx \\ &= \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y| < 1\}} \frac{e^{-i\langle tp, y \rangle}}{\sqrt{1 - |y|^2}} \, dy \\ &= \frac{t}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-it|p|y_2} \int_{-\sqrt{1 - y_2^2}}^{\sqrt{1 - y_2^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_1^2}} \, dy_1 \, dy_2 \\ &= \frac{t}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-it|p|y_2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \, d\eta \, dy_2 \\ &= \frac{t}{2} \int_{-1}^1 e^{-it|p|y_2} \, dy_2 \\ &= \frac{\sin|p|t}{|p|}. \end{split}$$

Dann gilt aber $\hat{R}(p,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin|p|t}{|p|}$ für alle $p \neq 0$, da beide Seiten invariant unter Drehungen sind. Wir haben also für n=2 die Formel

$$u(t,x) = \partial_t \left(\frac{t}{2\pi} \int_{\{|y|<1\}} \frac{f(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}} \, dy \right) + \frac{t}{2\pi} \int_{\{|y|<1\}} \frac{g(x-ty)}{\sqrt{1-|y|^2}} \, dy.$$

Damit die Formel eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ definiert, müssen wir für n=2 mehr voraussetzen, nämlich $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Beachte auch, dass $R(\cdot,t)$ für n=2 nicht mehr in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Für $n\geq 3$ ist die Gleichung $\hat{R}(p,t)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{\sin|p|t}{|p|}$ gar nicht mehr durch eine Funktion lösbar; trotzdem kann mit dem Ansatz eine Lösung gefunden werden. Der zweite Schritt – die Rechtfertigung der Lösungsformel – ist für die Wellengleichung deutlich subtiler als für die Wärmeleitungsgleichung.

12 Anhang

Satz 12.1 (Heine-Borel) Sei (X,d) metrischer Raum. Für $M \subset X$ sind äquivalent:

- (1) M ist folgenkompakt: jede Folge $x_k \in M$ hat einen Häufungspunkt $x \in M$.
- (2) M ist überdeckungskompakt: ist $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X$ offen, so gibt es $I' \subset I$ endlich mit $M \subset \bigcup_{i \in I'} U_i$.

BEWEIS: Sei M überdeckungskompakt. Wäre M nicht folgenkompakt, so gibt es eine Folge $x_k \in M$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U_x mit $x_k \notin U_x$ für hinreichend große k. Nach Voraussetzung wird M durch endlich viele Mengen U_{x_1}, \ldots, U_{x_N} überdeckt, also folgt $x_k \notin M$ für k groß, ein Widerspruch.

Sei nun umgekehrt M folgenkompakt, und $\bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung von M. Als erstes zeigen wir: es gibt ein $\varrho > 0$, so dass für alle $x \in M$ ein i = i(x) existiert mit $B_{\varrho}(x) \subset U_i$. Andernfalls gibt es zu $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M$ mit $B_{1/k}(x_k) \setminus U_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $x_k \to x \in M$. Aber $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$, also $B_{1/k}(x_k) \subset U_{i_0}$ für k hinreichend groß, Widerspruch.

Gäbe es nun keine endliche Teilüberdeckung, so finden wir induktiv x_1, x_2, \ldots in M mit $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{\varrho}(x_i)$. Es folgt $d(x_k, x_i) \geq \varrho > 0$ für k > i, das heißt die Folge x_k besitzt keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Voraussetzung.