Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 *(Caratheodory's Konstruktion, 3 Punkte)*
Sei $\mathcal{C}$ ein System von Teilmengen von X, und $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty]$. Es gelte

(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$ und $\lambda(\emptyset) = 0$.

(ii) Es gibt abzählbar viele Mengen $C_1, C_2, ... \in \mathcal{C}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^\infty C_i$.

Zeigen Sie: $\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \lambda(C_i) : C_1, C_2, ... \in \mathcal{C},\, E \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i \right\}$ ist äußeres Maß auf X.

Aufgabe 2 *(Überdeckungssatz von Heine-Borel, 3 Punkte)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ mit U_i offen (I beliebige Indexmenge). Zeigen Sie durch Widerspruch: K wird durch endlich viele der U_i überdeckt.
Hinweis. Fortgesetzte Würfelzerlegung mittels Halbierung der Kanten.

Aufgabe 3 *(Subadditivität des Durchmessers, 3 Punkte)*
Es sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $E_1, ..., E_k \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Mengen.

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel

$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{j=1}^k E_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \operatorname{diam}(E_j). \tag{1}$$

Ist die Abbildung $\operatorname{diam} : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß?

b) Es sei nun $C \subset \bigcup_{j=1}^k E_j$ für ein $C \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Zeigen Sie

$$\operatorname{diam}(C) \leq \sum_{j=1}^k \operatorname{diam}(E_j). \tag{2}$$

Hinweis zu Teilaufgabe b. Betrachten Sie erst den Fall $n = 1$, wobei C ein Intervall ist.

Anmerkung: Falls die Definition von diam *noch nicht bekannt ist: Für eine beliebige Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *definieren wir* $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} |x - y|$.

Abgabe: Di 10.11.2020 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorates.