Aufgaben zur Analysis III WS 20/21, Serie 10
Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 (*allgemeine Transformationsformel*)
Sei μ äußeres Maß auf X, $\phi : X \to Y$ und $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist $g \circ \phi$ μ-messbar, so ist g auch $\phi(\mu)$-messbar (Bildmaß) und es gilt, wenn eines der Integrale existiert,

$$\int_Y g \, d(\phi(\mu)) = \int_X g \circ \phi \, d\mu.$$

Aufgabe 2 (*Newtonpotential*)
Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : r_1 < |x| < r_2\}$, und $f \in L^1(A)$ sei rotationsinvariant, also $f(Tx) = f(x)$ für alle $x \in A$, $T \in \mathbb{SO}(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

$$\int_A \frac{f(y)}{|x-y|} \, dy = \begin{cases} \text{konstant} & \text{für } |x| < r_1, \\ m/|x| & \text{für } |x| > r_2, \end{cases} \quad \text{wobei } m = \int_A f(x) \, dx.$$

Aufgabe 3 (*Schwarzscher Stiefel*)
Gegeben sie der Zylindermantel $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \, 0 \leq z \leq 1\}$ mit Parametrisierung $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to Z$, $\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, z)$. Um den Flächeninhalt zu approximieren, wählen wir Unterteilungspunkte

$$p_{k,l} = \left(\frac{2\pi k}{2m}, \frac{l}{2n}\right) \text{ mit } 0 \leq k \leq 2m, \; 0 \leq l \leq 2n, \; k + l \text{ gerade},$$

und zerlegen so das Parametergebiet in Dreiecke mit Basis der Länge $2\pi/m$ auf den Strecken $z = l/(2N)$ und Höhe $1/(2N)$. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der zugehörigen Bilddreiecke. Was passiert im Grenzwert für $m, n \to \infty$?

Abgabe: Di 26.1.2021 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.