Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 *(Konforme Metriken)*
Betrachte auf $U \subset \mathbb{R}^n$ die Riemannsche Metrik $g_{ij} = e^{2\lambda}\delta_{ij}$ mit $\lambda \in C^2(U)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\Delta_g u = e^{-2\lambda}\big(\Delta u + (n-2)\langle Du, D\lambda\rangle\big)$.

(b) $\Delta\big(e^{\frac{n-2}{2}\lambda}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_g u = e^{-\frac{n+2}{2}\lambda}\,\Delta\big(e^{\frac{n-2}{2}\lambda}\,u\big)$.

(c) Für $\phi : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\phi(x) = x/|x|^2$, und g die durch ϕ induzierte Riemannsche Metrik auf $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, folgt die *Formel von Kelvin*:

$$(\Delta v)\circ\phi = |x|^{n+2}\Delta\big(|x|^{2-n}u\big) \qquad \text{für } u = v\circ\phi.$$

Aufgabe 2 *(Sektorformel von Leibniz)*
Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(t)\,(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ mit $r, \varphi \in C^1(I)$, $\varphi' > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zeigen Sie: die vom Ortsvektor überstrichene Fläche ist

$$A(c) = \frac{1}{2}\int_I r^2\varphi'\,dt.$$

Aufgabe 3 *(Injektive Immersionen)*
Finden Sie ein Beispiel einer injektiven Immersion $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}^2$, deren Umkehrabbildung $g : f(I) \to (a,b)$ nicht stetig ist (mit Nachweis)!

Abgabe: Di 2.2.2021 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.