Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 *(Torus in $\mathbb{R}^4$)*
Betrachten Sie für $0 < r < 1$ den Torus

$$T_r = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |z|^2 = r^2,\ |w|^2 = 1 - r^2\}.$$

Zeigen Sie, dass T_r eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt von T_r.

Aufgabe 2 *(Ein Oberflächenintegral)*
Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\mathbb{S}^2} x^2 y^2 z^2 \, d\mu_{\mathbb{S}^2}.$$

Aufgabe 3 *(Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen)*

a) Es sei $f : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^1-Immersion. Zeigen Sie: Zu jedem $p \in U$ gibt es eine offene Umgebung W von p mit $W \subset U$, sodass $f_{|W} : W \to f(W)$ eine Einbettung ist.

b) Für $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gelte: zu jedem $p \in M$ gibt es eine C^1-Immersion $f : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $p \in f(U) \subset M$, die zusätzlich eine Einbettung ist. Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Eine injektive C^1-Immersion $f : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine *Einbettung*, falls $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig ist. Hierbei ist $f(U)$ mit der von $\mathbb{R}^{n+k}$ induzierten Metrik auszustatten.

Abgabe: Di 9.2.2021 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.