Aufgabe 1 *(Eigenwerte des Laplaceoperators)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u \neq 0$, Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u = 0 \quad & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\lambda > 0$. Was gilt im Fall der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$?

Aufgabe 2 *(Eine Indexformel)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, und $x_0 \notin \partial\Omega$. Rechnen Sie nach, dass mit $\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ gilt:

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \left\langle \frac{x - x_0}{|x - x_0|^n}, \nu(x) \right\rangle d\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Aufgabe 3 *(Archimedisches Prinzip)*
Der untere Halbraum $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$ sei mit einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ ausgefüllt. Auf einen Körper $\Omega \subset \mathbb{H}$ wirkt dann bei $x \in \partial\Omega$ der vektorielle Druck $p(x) = \varrho x_3 \nu(x)$, wobei $\nu(x)$ äußere Normale ist. Berechnen Sie den Auftrieb

$$A = \int_{\partial\Omega} p(x)\, d\mu(x).$$

Aufgabe 4 *(Zwiebelformel)*
Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Zwiebelformel, siehe Satz 9.7 der Vorlesung, und berechnen Sie damit den Flächeninhalt der Sphäre $\mathbb{S}^n$ (siehe Beispiel 9.5).

Abgabe: keine .