Aufgabe 1 *(Urbilder von Erzeugern, 3 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ und $\mathcal{E} \subset 2^Y$. Zeigen Sie

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

Hinweis. Betrachten Sie $\mathcal{B} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$.

Aufgabe 2 *(Stetigkeit von regulären Maßen, 3 Punkte)*
Sei μ ein *reguläres* äußeres Maß auf X, das heißt zu jedem $A \subset X$ gibt es $\tilde{A} \supset A$ messbar mit $\mu(\tilde{A}) = \mu(A)$. Zeigen Sie: für *jede* Folge von (nicht notwendigerweise messbaren) Mengen $A_1, A_2, ...$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Aufgabe 3 *(Hausdorffmaß, 3 Punkte)*
Sei $s \geq 0$. Betrachten Sie für $\delta > 0$ auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ die Funktion

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_s \Big(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\Big)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\, \operatorname{diam} C_j < \delta\Big\}.$$

Dabei ist $\alpha_s > 0$ eine Normierungskonstante. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ ist ein äußeres Maß.

(b) $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ existiert in $[0, \infty]$ und definiert ein äußeres Maß.

(c) $\mathcal{H}^0 = \text{card}$, wenn $\alpha_0 = 1$ gewählt wird.

(d) $\mathcal{H}^s$ ist ein Borelmaß.

Abgabe: Di 17.11.2020 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.