Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 (*zur Messbarkeit*)
Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{falls } f(x) > k, \\ -k & \text{falls } f(x) < -k, \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so sind auch f_k, g_k messbar und die Funktionen $f_k + g_k$, αf_k, $f_k^{\pm}$, $\max(f_k, g_k)$, $\min(f_k, g_k)$, $|f_k|$, $f_k g_k$ und f_k/g_k konvergieren mit $k \to \infty$ punktweise gegen die entsprechenden Funktionen für f, g, falls letztere definiert sind.

Aufgabe 2 (*Maße von Kugeln*)

Sei μ ein lokal endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass unterhalbstetige Funktionen stets μ-messbar sind.

(b) Betrachten Sie nun

$$\theta : \mathbb{R}^n \times ([0, \infty) \to [0, \infty), \ \theta(x, r) = \mu(B_r(x)) \quad \text{wobei } B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

Folgern Sie: die Funktion $\theta(\cdot, r)$ ist ist μ-messbar.

Hinweis zu Aufgabe 2a: Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \to x$ gilt, dass $f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$.

Aufgabe 3 (*Integration bzgl. Diracmaß*)
Sei X eine Menge, und δ_{x_0} sei das Diracmaß auf X im Punkt x_0. Bestimmen Sie die bzgl. δ_{x_0} integrierbaren Funktionen und berechnen Sie für eine solche Funktion f das Integral

$$\int_X f d\delta_{x_0}$$

(mit Beweis, dass die von Ihnen angegebene Formel stimmt).

Abgabe: Di 1.12.2020 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.