Aufgabe 1 (*Unendliche Reihen von Funktionen*)
Es sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\,d\mu < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise μ-fast-überall gegen eine integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und es gilt

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\,d\mu.$$

Aufgabe 2 (*Zur Integrierbarkeit*)
Sind $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\mu(X) < \infty$, so ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^\infty \mu\big(\{|f| > n\}\big) < \infty.$$

Aufgabe 3(*Konvergenz im Maß/Stochastische Konvergenz I*)
Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$. Die Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiere punktweise μ-fast-überall gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\Big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\Big\}\Big) = 0.$$

Abgabe: Di 8.12.2020 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.