
Aufgabe 1 (*Zu den L^p-Integralen*)
Sei $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie für eine μ-messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q}$ für $1 \leq p < q \leq \infty$.

(b) $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

Aufgabe 2 (*Newtonpotential*)
Der Träger einer Funktion $\varrho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $\operatorname{spt} \varrho = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) \neq 0\}}$. Betrachten Sie für $n \geq 3$ und $\operatorname{spt} \varrho$ kompakt die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u(x) = \int \frac{\varrho(y)}{|x-y|^{n-2}}\, d\mathcal{L}^n(y).$$

Zeigen Sie, dass $u(x)$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert (also insbesondere reellwertig) ist. Zeigen Sie auch, dass u auf $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{spt} \rho$ unendlich oft differenzierbar ist mit $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{spt} \varrho$.

Aufgabe 3 (*Gleichheitsfälle*)
Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Wann gilt Gleichheit in der Hölder-Ungleichung

$$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}?$$

b) Wann gilt Gleichheit in der Minkowski-Ungleichung

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}?$$

Abgabe: Di 15.12.2020 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.