Ernst Kuwert, Marius Müller
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/

Aufgabe 1 (*Konvergenz von trigonometrischen Reihen in L^2*)
Folgerung 6.2 aus dem Skript besagt, dass für alle $f \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ gilt, dass

$$||f||^2_{L^2} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2. \tag{1}$$

Folgern Sie nur aus dieser Gleichung und der Definition von $\widehat{f}(k)$, dass die zu f assozzierte Fourierreihe in $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ gegen f konvergiert. Präziser: Folgern Sie nur aus Benutzung von (1), dass für

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{2}$$

gilt, dass $||f_n - f||_{L^2} \to 0$.

Aufgabe 2 (*L^p-Konvergenz bei Translationen*)
Für $h \in \mathbb{R}$ sei $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$. Beweisen Sie für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{h\to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Gilt das auch für $p = \infty$?

Aufgabe 3 (*Zur dominierten Konvergenz und L^p*)
Für $1 \leq p < \infty$ seien $f_k, f \in L^p(\mu)$ mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$. Weiter gebe es integrierbare Funktionen $g_k, g : X \to [0,\infty]$ mit $|f_k|^p \leq g_k$ μ-fast-überall, für alle $k \in \mathbb{N}$, und $g_k \to g$ in $L^1(\mu)$ mit $k \to \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $|f|^p \leq g$.

(b) Zeigen Sie, dass $||f_k - f||_{L^p} \to 0$.

Abgabe: Di 22.12.2020 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.