Aufgabe 1 (*Zum Satz von Egorov*)
Im Satz von Egorov, siehe Satz 6.6 der Vorlesung, wurde verlangt, dass $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass auf diese Voraussetzung nicht ohne Weiteres verzichtet werden kann.

Aufgabe 2 (*Messbarkeit beim Cavalieri-Prinzip*)
Sei $E_1 = \big([0,1] \times ([0,1]\backslash S)\big) \cup \big([1,2] \times S\big)$, mit $S \subset [0,1]$ nicht $\mathcal{L}^1$-messbar. Weiter sei $E_2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Die y-Schnitte von E_1, E_2 und $E_1 \cup E_2$ sind $\mathcal{L}^1$-messbar für alle $y \in \mathbb{R}$.

(b) Die Funktionen f_{E_1}, f_{E_2} sind $\mathcal{L}^1$-messbar, aber nicht $f_{E_1 \cup E_2}$.

Hinweis. Es ist $f_E(y) = \mathcal{L}^1(E_y)$, wobei E_y der y-Schnitt ist für $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 *(Volumen eines Volltorus)*
Sei $0 < \varrho < R$ und $D = \big\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-R)^2 + z^2 < \varrho^2\big\}$. Der Volltorus T entsteht durch Rotation von D um die z-Achse. Berechnen Sie das Volumen $\mathcal{L}^3(T)$.
Hinweis. Der Transformationssatz wird nicht benötigt. Sie dürfen ohne Beweis verwenden dass für $d, n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\mathcal{L}^d \times \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{d+n}$.

Abgabe: Di 9.1.2021 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.
Schöne Ferien und einen guten Rutsch!