

Aufgabe 1 (*Berechnungen mit Fubini*)

Zeigen Sie die Existenz der folgenden Integrale und geben Sie ihren Wert an.

- (a) $\int_A y\sqrt{x} d\mathcal{L}^2(x, y)$ mit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$,
- (b) $\int_B \frac{y}{x} e^x d\mathcal{L}^2(x, y)$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^{\frac{3}{2}} \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Aufgabe 2 (*Volumen eines Simplex*)

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Volumen der Menge

$$S_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}.$$

Aufgabe 3 (*Integration von Produktfunktionen*)

Seien α, β äußere Maße auf X, Y , beide σ -endlich, und $f \in L^1(\alpha), g \in L^1(\beta)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, F(x, y) = f(x)g(y)$, in $L^1(\alpha \times \beta)$ liegt und dass gilt:

$$\int_{X \times Y} F d(\alpha \times \beta) = \int_X f d\alpha \int_Y g d\beta.$$

Abgabe: Di 19.1.2021 12 Uhr im ILIAS-Portal Ihres Tutorats.