Aufgabe 1 *(Rand einer Menge)*
Der Rand einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\, \varepsilon > 0 \text{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \text{ und } B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \backslash M) \neq \emptyset\}.$$

Bestimmen Sie den Rand der folgenden Mengen:

1. $M = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
2. $M = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
3. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}\backslash\{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$.

Aufgabe 2*(Abgeschlossene Teilmengen)*
Sei (X,d) ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. Dann ist M zusammen mit der induzierten Metrik d_M (Einschränkung von d auf M) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset M$ genau dann abgeschlossen in M ist, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ gibt mit $A = Z \cap M$.

Aufgabe 3 *(Operatornorm)*
Die Operatornorm auf dem Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist definiert durch $\|A\| := \sup_{|x|\leq 1} |Ax|$. Zeigen Sie:

(1) $\|A\|$ ist eine Norm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $|Ax| \leq \|A\|\,|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ist $\|A\|'$ eine beliebige Norm mit dieser Eigenschaft, so gilt $\|A\| \leq \|A\|'$.

Kennen Sie eine andere Norm mit dieser Eigenschaft?