Aufgabe 1 *(Beispiel zum Umkehrsatz)*
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x + y + e^x, y^3)$$

bijektiv ist. Ist f ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 2 *(Lipschitzstetige Umkehrabbildungen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es gebe ein $\mu > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \mu\,|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \Omega.$$

(a) $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in \Omega$.

(b) Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Hinweis: Zeigen Sie bei (b) für die Surjektivität, dass das Bild $f(\mathbb{R}^n)$ offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist, und folgern Sie $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.