Aufgabe 1 *(Tangentialraum von Graphen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Der Graph von f ist die Menge

$$G = \{(x, f(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Omega\},$$

und die Graphenabbildung von f ist

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1},\ F(x) = (x, f(x)).$$

(1) Berechnen Sie die Jacobimatrix von F im Punkt $x \in \Omega$.

(2) Bestimmen Sie eine Basis von $T := \operatorname{Bild} DF(x)$.

(3) Bestimmen Sie eine Einheitsnormale ν an T.

(4) Rechnen Sie explizit und zeichnen Sie für $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, im Punkt $(x, y) = (1/2, 1/2)$.

(5) Wie lautet in (4) die Graphendarstellung der Mengen $G_{p,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(G - p)$ für $p = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$? Untersuchen Sie den Grenzübergang $\lambda \to 0$.

Falls die Aufgabenteile (1) bis (3) Schwierigkeiten bereiten, sollten die Fragen zuerst im Spezialfall (4) betrachtet werden.

Aufgabe 2 *(Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$)*
Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Abbildung

$$f : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ f(r, \theta, \varphi) = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

Skizzieren Sie die Kurven $r \mapsto f(r, \theta, \varphi)$, $\theta \mapsto f(r, \theta, \varphi)$ und $\varphi \mapsto f(r, \theta, \varphi)$, und zeichnen Sie die Vektoren $\partial_r f$, $\partial_\theta f$ und $\partial_\varphi f$ in einem Punkt $f(r, \theta, \varphi)$ ein. Berechnen Sie die Skalarprodukte $g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle$ für $1 \le i, j \le 3$.