Aufgabe 1 *(Zusammenhang)*
Definition. Ein metrischer Raum M heißt zusammenhängend (im mengentheoretischen Sinn), wenn folgende Implikation gilt:

$$\emptyset \neq A \subset M, \;\; A \text{ offen und abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad A = M.$$

Wir interessieren uns für $M \subset \mathbb{R}^n$, die Worte offen und abgeschlossen beziehen sch dann auf die Relativtopologie (vgl. Beispiel 1.2). Zeigen Sie:

(a) Aus wegweise zusammenhängend folgt zusammenhängend.

(b) Für offene Teilmengen sind die Begriffe äquivalent.

(c) $M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegweise zusammenhängend.

(d) $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn M ein Intervall ist.

Aufgabe 2 *(Inversionsabbildung)*
Zeigen Sie die Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung von

$$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \; f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Folgern Sie $Df(x) = \varphi(|x|)T(x)$ mit $\varphi(x) > 0$ und $T(x) \in \mathbb{O}^-(n)$.

Aufgabe 3 *(Operatornorm)*
Die Operatornorm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist $\|A\| := \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$. Zeigen Sie:

(1) $\|A\|$ ist eine Norm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $|Ax| \leq \|A\| \, |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ist $\|A\|'$ eine beliebige Norm mit dieser Eigenschaft, so gilt $\|A\| \leq \|A\|'$.