Aufgabe 1 *(Youngsche Ungleichung)*
Beweisen Sie für $x, y \geq 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Studieren Sie dazu die reelle Funktion $f(x) = \dfrac{x^p}{p} - xy$ für festes $y > 0$.

Aufgabe 2 *(Höldersche Ungleichung)*
Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $1 < p < \infty$ sei

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz: sind $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis. Der Beweis ist analog zum Beweis der Ungleichung von Cauchy-Schwarz aus Analysis 1. Sie dürfen $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ annehmen (wieso?). Wenden Sie dann Aufgabe 1 an.

Aufgabe 3 *(Minkowski-Ungleichung)*
Für $1 < p < \infty$ gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ergibt sich nun aus der Hölderschen Ungleichung (beachte $q = p/(p-1)$)

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\;|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\;|x_i+y_i|^{p-1} \leq \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\|x+y\|_p^{p-1}.$$

Insgesamt ist damit bewiesen: $\|x\|_p$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.