Aufgabe 1 *(Einheitskugeln von Normen)*

1. Es gilt $\|.\|_1 \geq 0$ sowie $\|.\|_\infty \geq 0$. Sei jetzt $\|x\|_1 = 0$, dann folgt $|x_i| = 0$ für alle $i = 1 \dots n$, d.h. $x = 0$. Analog folgt für $\|x\|_\infty = 0$, dass $\max_i |x_i| = 0$, d.h. $x = 0$.

2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt aus der Definition
$$\|\lambda \cdot x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|\lambda x_i\| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$$
$$\|\lambda \cdot x\|_\infty = \max_i |\lambda \cdot x_i| = |\lambda| \cdot \max_i |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty.$$

3. Zum Beweis der Dreiecksungleichung benötigen wir die Dreiecksungleichung der Betragsfunktion:
$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$
$$\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i+y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Im Fall $n = 1$ stimmen die euklidische Norm und die Normen $\|.\|_1$ sowie $\|.\|_\infty$ überein. Die Einheitskugel ist das offene Intervall $(-1, 1)$. Im Fall $n = 2$ ist die Einheitskugel für die euklidische Metrik das Innere der Kreisscheibe, für die Norm $\|.\|_1$ ist es das Innere des Quadrates im $\mathbb{R}^2$, welches seine Eckpunkte in den Punkten $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, -1)$ besitzt. Die Einheitskugel der Maximumnorm $\|.\|_\infty$ im $\mathbb{R}^2$ ist das Innere des Quadrates, welches seine Eckpunkte in $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ hat. Im Fall $n = 3$ ist die Einheitskugel der euklidischen Metrik das Innere der Kugel. Die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ der Norm $\|.\|_1$ ist das Innere eines Oktaeder mit Eckpunkten $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ und die Einheitskugel der Maximumnorm ist das Innere eines Hexaeder (Würfel) mit Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Aufgabe 4 *(Produktmengen)*

(1) A, B offen $\quad\Rightarrow\quad A \times B$ offen.
Sei $(x, y) \in A \times B$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset A$ sowie $B_\delta(y) \subset B$ (A und B sind offen). Wähle $\kappa := \min\{\epsilon, \delta\}$, dann folgt
$$B_\kappa(x, y) \subset B_\kappa(x) \times B_\kappa(y) \subset A \times B,$$
d.h. $A \times B$ ist offen.

(2) A, B abgeschlossen $\quad \Rightarrow \quad A \times B$ abgeschlossen.
Für beliebige Mengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ gilt

$$X \times Y \setminus A \times B = (X \setminus A \times Y) \cup (X \times Y \setminus B) \tag{1}$$

Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen, dann sind $X \setminus A$ und $Y \setminus B$ offen. Da X und Y offen sind, folgt aus Teil (1), dass $X \setminus A \times Y$ sowie $X \times Y \setminus B$ offen sind. Inbesondere liefert die obige Formel, dass $X \times Y \setminus A \times B$ offen und damit $A \times B$ abgeschlossen ist.

(3) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.
Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $A \subset X$ sowie $B \subset Y$. Wir betrachten die Metrik

$$d((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = d_X(a_1, a_2) + d_Y(b_1, b_2)$$

auf $X \times Y$. Dann folgt

$$B_\epsilon(x, y) \subset B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset B_{2\epsilon}(x, y) \subset X \times Y.$$

Insbesondere erhalten wir aus den Definitionen

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}, \quad \text{und} \quad \operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B).$$

Aus dem Satz 1.3 der Vorlesung sowie der Gleichung 1 folgt deshalb

$$\begin{aligned} \partial(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus \operatorname{int}(A \times B) = \overline{A} \times \overline{B} \setminus \operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B) \\ &= \big((\overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times (\overline{B} \setminus \operatorname{int}(B))\big) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B) \end{aligned}$$